理论力学

上册

朱照宣
周起钊　编
殷金生

北京大学出版社

理 论 力 学

（上）

朱照宣 周起钊 殷金生 编

北京大学出版社

理 论 力 学（上）

北京大学出版社出版
（北京大学校内）
北 京 新 华 印 刷 厂 印 刷
新华书店北京发行所发行
850×1168毫米 32开本 12.5 印张 313千字
1982年2月第一版 1982年2月第一次印刷
印数：40000册

统一书号：13209·30 定价：1.50元

内 容 提 要

本书前七章是基础部分，包括静力学、运动学、质点和质点系动力学；后三章是专题部分，其中包括分析力学初步。共配有二百多个例题，五百多道习题，并附有答案。全书需两学期或三学期讲完。

本书可供综合大学或理工科大学力学专业理论力学课程用作教材，也可作为高等工业院校有关专业的教学参考书。

符　号　表

$\boldsymbol{a}$　加速度

$\boldsymbol{b}$　副法向单位向量

C　质心，重心，阻力系数

c　光速，阻尼系数

E　总机械能

e　偏心率，偏心距，碰撞恢复系数

$\mathbf{e}$　向量基$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$

$\boldsymbol{F}$　力

f　摩擦力，频率

$\mathbf{G}$　动量矩

$\boldsymbol{g}$　重力加速度

$\mathbf{H}$　拉梅系数矩阵

H　哈密顿函数

$\mathbf{I}$　单位矩阵

$\boldsymbol{I}$　冲量

$\mathbf{i}$　正交单位向量基$(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$

$\mathbf{J}$　惯量张量，惯量矩阵

k　弹性系数，回转半径

$\boldsymbol{L}$　主矩

L　拉格朗日函数

M，m　质量

$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})$　力$\boldsymbol{F}$对O点的矩

$\boldsymbol{N}$　正压力，约束力

$\boldsymbol{n}$　法向单位向量

$\mathbf{P}$　变换矩阵

$\boldsymbol{p}$　动量

p　正焦弦

$\mathbf{Q}$　正交变换矩阵

Q　广义力

(q_1, q_2, q_3)　曲线坐标

$\boldsymbol{R}$　主向量

$\boldsymbol{r}$　向径

s　弧长

T　动能，绳中张力，振动周期，矩阵转置符号

U　有效势能

V　势能，体积

$\boldsymbol{v}$　速度

W　功，重量

γ　万有引力常数，重度

δ　静伸长，δ函数

$\boldsymbol{\varepsilon}$　角加速度

ε　摩擦角

λ　特征值，纬度，不定乘子

μ　摩擦系数，流体粘度，折合质量

ρ　密度，极坐标

$\boldsymbol{\tau}$　切向单位向量

τ 特征时间

ψ,θ,φ 欧拉角

$\boldsymbol{\omega}$ 角速度矩阵

$\boldsymbol{\omega}$ 角速度

ω 角速度，（圆）频率

下 标 符 号

a 绝对的

c 科氏的

e 牵连的

max 极大

min 极小

r 相对的

编者的话

理论力学是力学专业的一门基础课，本书是作为这门课的教材而编写的。与数学、物理类同一课程的教材相比，注意了应用方向，并将静力学和运动学单独成章；与工科的理论力学教材相比，则又注意了理论深度，在部分章节使用了矩阵工具。书中通过具体例子介绍了力学工作中的一些方法，诸如选取力学模型、量纲和数量级分析、近似计算和逐次逼近法、数学结果的物理解释等。

北京大学力学专业自1952年成立以来，周培源、吴林襄等许多同志讲授过理论力学这门课程，积累了不少教学经验，编者力图在书中吸收这些经验。另外，编者也考虑了工科理论力学教学中的一些特点，以便本书能适合工科教学中的参考。

本书分上下两册，共十章。前七章包括静力学、运动学以及质点动力学、质点系动力学的几个基本定理，它们组成课程的基本部分；以后的三章则带有专题的性质。在讲授时教师可根据需要和学时数省略某些章节。考虑到力学专业基础课的特点，本书对分析力学只作初步介绍，对相对论力学基本上沒有提及。连续介质力学的共同理论基础应该属于理论力学的范围，但根据以往的习惯，暂时也沒有包括在内。

为了便于教学，书中有例题、思考题、习题和习题答案。例题并不全是示范性的习题，其中有的是为配合正文中某些概念而编写的，有的则本身也有一定的意义。

本书的油印稿曾在北京大学力学系1978和1979年两年入学的班级中用作教材。参加教学工作的教师叶以同、鲍慧芸、丁年才、孟志华等同志指出了其中一些问题和错误；有些同学对习题作了校正；兄弟院校的一些同行也对油印稿提出了不少宝贵的意见。本书由丁中一、邱淑清和陈滨三位同志作了详细审校。编者谨对以上同志表示感谢。限于编者水平，定稿后遗留下的错误和问题一定还有，恳切希望读者指正。

编　者

1981年3月于北京大学

上册目录

绪　言

力学是研究物质机械运动规律的科学。物体的机械运动是指物体的空间位形随时间的变化，它包括移动、转动、流动和变形等等，也包括静止。静止或平衡是运动的一种特殊情况。“力学”在英语中叫 mechanics，起源于希腊文 μηχανη，有机械①或工具的意义；汉语中的“力学”一词字面上是力的科学，已沒有机械的意义了②。

机械运动是自然界最普遍、最基本的运动形态。在物质的复杂运动或高级运动形态中，如物理的、化学的、甚至是生物的运动形态中，都包含着机械运动的內容。力学的研究为揭示大自然中和机械运动有关的规律提供了有效的武器。研究天体的运行和演化需要天体力学、流体力学等的帮助；研究地幔、地壳的运动和发展需要地球构造动力学等的帮助；近年来，连生命现象中的力学问题也越来越受到重视，从而形成了“生物力学”这样的分支。至于物理学、化学等更是与力学有着密切的联系。力学本来是物理学的一个分支，后来才和物理学有了不同的分工。所以，力学是一门基础学科。

力学同时又是和工程技术联系极为广泛的一门技术学科，它是近代工程技术的重要理论基础之一。由于空气动力学的发展，才使现代航空航天技术有今天这样的水平；由于结构力学、弹性力学等的发展，使得大型建筑结构、重型机械设备的设计有了可

---

① 力学的，机械的在英语中都是mechanical.

② 西方的 mechanics 在十七世纪传入中国，译为“重学”，经历了二百多年，到十九世纪末才改叫“力学”。如我国最早的力学专著是李善兰（1810—1882）译的《重学》一书（1858年）。

靠的力学根据。其他如材料力学性能的研究促进了新型材料的创造和使用，地下渗流的研究有助于提高石油的开采效率等等。正因为这样，力学课程始终是各种工科专业的重要基础课程。

力学科学的发展始终是和人类的生产活动紧密联系的。在古代，人类就在农田灌溉、建筑、运输等方面逐渐积累了一些初步的力学知识。例如，在我国的墨翟（公元前468—382）及其学派的著作《墨经》里，就有了关于力、重心等概念的叙述，这可以说是世界上最早的有关力学的论述。古希腊的亚里士多德（公元前384—322）、阿基米德（公元前287—212）等也总结了不少关于杠杆平衡等力学规律。以后，人类在生产实践中不断地总结了一些动力学的规律，但比较零星和粗糙。力学作为一门"精确"科学，则是由牛顿（Newton, I., 1642—1727）奠基的。牛顿在他的名著《自然哲学的数学原理》①中，系统地总结了那时所了解到的力学规律。在牛顿以后的二、三百年间，力学科学有了很大的发展，逐步地使力学成为一门精确的科学。

人类认识力学规律，同认识其他规律一样，是从实践出发，抽象上升为理性的认识，而后又在实践过程中进行检验，是一个由粗取精，由表及里的过程。就牛顿总结万有引力定律来说，它们是从开普勒（Kepler, J., 1571—1630）的行星规律和其他天文观测资料归纳出来的，而开普勒的定律则又是以哥白尼（Copernicus, N., 1473—1543）的工作和第谷·布拉赫（Tycho Brache 1546—1601）所积累的二十多年天文观测资料为依据的。没有这种第一性的资料，什么理论也不可能得到，而理论的正确与否，还得由实践来证明。例如，法国青年科学家勒威耶（Leverrier, U. J. J., 1811—1877）根据当时的资料，运用万有引力定律和微分方程，经过计算发现太阳系中除了七大行星外，还应该有一颗大行星（就是海王星），在1846年公布了他的结果。过后不久，果

① 1687年出版，原文是拉丁文，有郑太朴的汉译本《自然哲学之数学原理》，商务印书馆，1931年版。

然在他指出的方位上伽勒（Galle, J. G., 1812—1910）观测到了海王星。这就有力地证明了万有引力定律的正确性。

力学的研究需要实验、计算和理论三方面的配合。在探索力学规律时，无论在哪一方面，都需要精确地测量和计算（或者描述）力学量及其变化。这一特点决定了力学与数学之间有着密切的联系。比如弹性力学、流体力学的研究是和数学分析、微分方程的发展紧密相关的。现代电子计算机的出现，又为数学在力学中的应用提供了更好的工具，从而促进了力学理论的发展。我们在这门课程中所学的是一些成熟的、经典性的结果，着重于数学推理这一方面，但是应该牢记实践是检验真理的唯一标准。力学理论是否正确，都得经过实验室中的实验，或对自然现象的直接观测，或在工业技术中的应用，归根到底都得经过实践的检验。

实际的研究对象往往是相当复杂的，但在力学的理论工作中，常常是抓住一些带本质性的主要因素，而撇开一些影响不大的次要因素，从而提炼出所谓**力学模型**作为研究的对象。当物体运动的范围比它本身的尺寸要大得多时，我们就把物体当作是只有质量而没有大小的一个**质点**。任何固体在受到外力作用或温度变化时都要变形，如果这种变形在我们所研究的问题中可以不考虑或者暂时不考虑，我们就把物体当作不可变形的**刚体**来处理。质点和刚体是两种最基本的力学模型。从原则上说，任何物体都可以认为是由许多质点组成的，即当作**质点系**来处理。比如刚体就是任意两点之间的距离保持不变的一个质点系。真实的物体是由许多粒子（原子、分子等）组成的，但在力学中往往把物质或者材料当作连续分布的。如果物体中每一点的力学性能反映了这点附近千千万万个真实粒子的平均性能，则这种物体就可以被当作**连续体**（continuum）。在分析流体（气体、液体）的流动，固体的变形时，往往采用连续体这种力学模型。对于一个真实的物体采用什么样的力学模型，这决定于问题的性质。以地球为例，在考虑地球在太阳系中的运动轨道时，地球的大小（半径约为

6370公里）比其轨道半径的大小（半径为一个天文单位，即约 1.5×10^8 公里）要小得多，我们就可把地球理想化为一个质点。在研究人造卫星的运行轨道时，地球的大小就不能不考虑，但它的变形可忽略，于是把地球理想化为一个刚体（球，精确一些当作椭球体甚至更复杂的几何形状）。至于在考虑地震的起因或者地球的演化问题时，必须考虑地球本身各部分的变形和流动，那时通常采用连续体这样的力学模型。

理论力学研究关于质点、刚体、质点系和连续体等等力学模型的基本规律。本书只讲质点、刚体及质点系的一般力学规律，而不讨论连续体中的力学规律。在理论力学中所讲的力学规律，通常只限于以牛顿运动规律为根据的经典力学。它只考虑宏观的物体，而不考虑原子、电子等微观结构所遵循的量子力学规律，只考虑运动速度远远小于光速（3×10^8米/秒）的情况，而不考虑相对性效应。这样的理论对于解决自然界和工业技术中相当一部分问题是行之有效的，这已为无数的事实所证实。

作为一门基础课，学习理论力学务必在以下三个方面达到要求：准确地理解基本概念；熟悉基本定理与公式，并能在正确条件下灵活应用；最后是学会一些处理力学问题的基本方法。为了达到这一目标，就需要在钻研理论方面和解算例题与习题之间反复交替，使认识逐步深化。

第一章 静 力 学

静力学是力学中发展较早的一部分，它研究物体的静止和力系平衡的规律。任何静止和平衡都是相对的，即是相对于某一个**参考体**（也叫**参照体**）的。在静力学中所谓物体处于静止状态，通常是把地球当作一个参考体，而许多力的平衡就是指地球上静止的物体在附加上这些力后能够继续保持静止。我们把作用于同一个物体上的许多力叫做一个**力系**。在本章中我们要讨论物体（主要是质点和刚体）上力系的平衡条件，这就要先分析力系的特征以及研究力系的简化问题。

1-1 力、力系的主向量

力的概念来自实践。人类在最早的劳动中就使用体力①，《墨经》中把力说成物体由静止进入运动的原因："**力**，形之所以奋也"。这是人们早期对力的认识②。从现代科学看，力总是一个物体对另一个物体的作用，是造成运动变化的原因。在宏观表现上，这种力可以是超距离的，也可以是由接触而产生的。一个物块放在桌子上，物块受到地球的引力（也就是重力）的作用，这是一个超距离的力。物块受到桌面的托力，这是一个由接触产生的力。

为了要确定一个力，必须说明它的大小、**方向**和**作用点**，即一个力有三个要素。实践证明，力是可以按照**平行四边形法则**进

---

① 力的篆文是〆．有人研究，它象形于臂（右臂）向下用劲（见丁福保《说文诂林》）。

② 在古代的欧洲，人们普遍地认为力是造成速度的原因，物体不受力就没有速度．这种错误的认识以当时著名学者亚里士多德为代表．到了伽里略和牛顿时代人们才建立起正确的认识。

行合成的。就是说，如果有两个力作用在一个物体的同一点M上(图1.1)，其大小和方向分别由有向线段$\overrightarrow{MA}$和$\overrightarrow{MB}$表示，则这两个力和另外一个力对物体的作用效果是一样的：这个力的作用点也在M点，其大小和方向由有向线段$\overrightarrow{MC}$表示，而MC是平行四边形$MACB$的对角线。这样，我们就简单地说两个力合成了一个力。有大小，有方向，且满足以平行四边形法则作加法的物理量是向量或矢量①。因此，力是向量。向量用黑斜体字母表示，如$\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{p}$等，或在字母上加箭头，如$\vec{F}$，$\vec{R}$等。零向量用0表示。

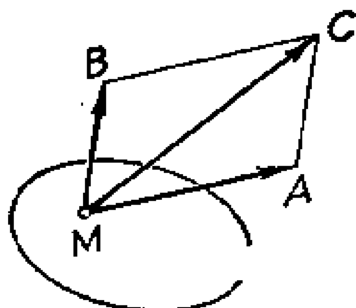


图1.1 力的平行四边形法则

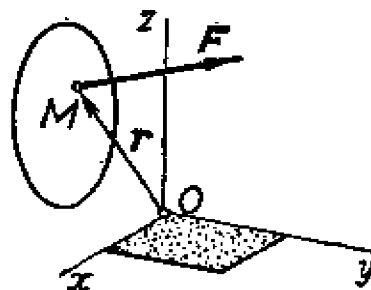


图1.2 $\boldsymbol{F}$的作用点是M

力是向量，但是单用一个向量符号$\boldsymbol{F}$还不能说明力的全部三个特征。因为$\boldsymbol{F}$只说明大小和方向。为了完全确定一个力，还要说明力的作用点。如$\boldsymbol{F}$作用于物体上的M点，我们可以在选定的参考体上任意取定一个点O用**向径** $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$来表明作用点的位置(图1.2)。有了两个向量$\boldsymbol{F}$和$\boldsymbol{r}$，这个力才完全被确定下来。

每一个物理量都有确定的量纲，在计算时要采用一定的单位制。在**国际单位制**(SI)②中，力的基本单位是牛顿(N)，在工程中常用千牛顿(kN)，长度的单位是米(m)。在我国，国际单位制

① 汉字"矢"象形是﹝矢﹞、画的是一支箭。

② 详见国际计量局：《国际单位制(SI)》，科学出版社，1975. 第九届国际计量大会(1948年)决议7中规定，在CGS制中力的基本单位是达因(dyne)，1达因$=10^{-5}$牛顿。国际计量委员会认为，CGS制最好不与SI并用。但是，由于大家对CGS制比较熟悉，所以目前实际上还是在并用着。

已在推行，但工程界和日常生活中还经常采用**工程单位制**，其中力的单位是公斤[1]（kg）或吨（t），一吨＝1000公斤。一公斤（力）等于9.80665牛顿。本书以SI为主，适当照顾工程单位制。

假设作用在物体上的力系中有n个力$\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$，作用点分别为$M_1, M_2, \cdots, M_n$，其向径为$\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n$；或者简写为力系$\boldsymbol{F}_i$，作用点向径为$\boldsymbol{r}_i = \overrightarrow{OM_i}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$。在最简单的情况下，这个力系中各个力作用在同一点M上，即$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_2 = \cdots = \boldsymbol{r}_n$，它称为**共点力系**。

按照力的平行四边形法则，可以把$\boldsymbol{F}_1$和$\boldsymbol{F}_2$合成为一个力$\boldsymbol{F}_{12}$，$\boldsymbol{F}_{12} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$，且作用在$M$点（图1.3）。接着再用平行四边形法则求出$\boldsymbol{F}_{12}$与$\boldsymbol{F}_3$的合力$\boldsymbol{F}_{123}$，$\boldsymbol{F}_{123} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3$，作用点仍在$M$。一直下去，最后求得一个力$\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{F}_n$，这个力称为共点力系的**合力**。合力的作用点在公共作用点M上，所以

> 共点力系（$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，…，$\boldsymbol{F}_n$）的合力
>
> $$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i,$$
>
> 作用点在公共点上。

作用在质点上的力系，因各个力的作用点都在这个质点上，一定是共点力系。所以对于质点来说力系一定有合力$\boldsymbol{F}$。

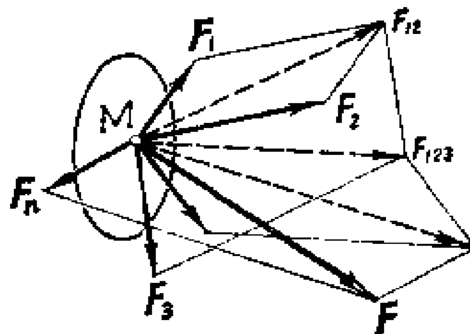


图1.3　共点力系的合力

一般说来，一个物体上所受的各个力的作用点并不一定是相同的。设有力系$\boldsymbol{F}_i$，作用点分别为M_i $(i=1, 2, \cdots, n)$（图1.4（a））。我们不能直接用平行四边

---

[1] kilogram作为质量单位时译为千克，作为力单位时译为公斤。

形法则对力进行合成以求出合力，因为只有作用在同一个点的两个力才能这样做。但是 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n$ 既然是向量，我们仍然可以求出它们的向量和 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\cdots+\boldsymbol{F}_n$，这个向量和我们用符号 $\boldsymbol{R}$ 表示（图1.4(b)），叫做力系的**主向量**：

> 任意力系 $\boldsymbol{F}_i(i=1,2\cdots,n)$ 的主向量
> $$\boldsymbol{R}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i. \tag{1.1}$$

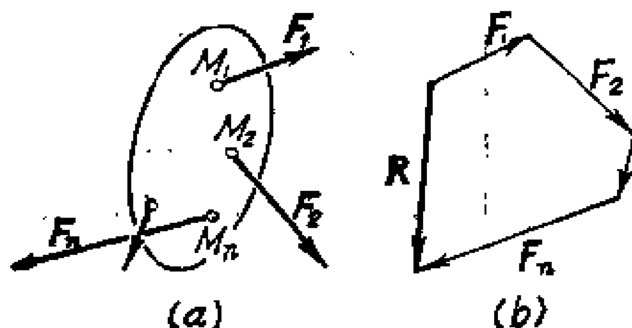


图1.4　主向量 $\boldsymbol{R}$

要注意的是，主向量和合力在概念上是两件事。因为在主向量中，并没有包含作用点的因素。对于上面所说的共点力系这个特殊情况，它有一个主向量 $\boldsymbol{R}$（我们只说出了它的大小和方向，并不去管这个向量的作用点），又有一个合力 $\boldsymbol{F}$（我们必须说明它的作用点才有意义）。虽然在这种情况下，主向量 $\boldsymbol{R}$ 与合力 $\boldsymbol{F}$，作为向量，它们的大小和方向是一样的，但是毕竟它们是两个概念。以后我们会看到，有些力系根本没有合力，但是仍然可以求出主向量。实际上主向量是合力概念的一种推广。主向量是整个力系的一个特征量，这个特征量和下一节将要讲到的另一个特征量一起，能刻划力系改变物体整体运动（包括平衡）的性能。这一点在学完动力学后会更清楚。

只要知道力系中各个力的大小和方向（暂且不管其作用点）就一定可以求出主向量 $\boldsymbol{R}$。现在来作具体计算。通常我们在参考体上取一个固定的直角坐标架 $Oxyz$（与参考体固连在一起），它的原点在 O，它沿 x,y,z 轴方向的单位向量为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$。[$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$] 称为一组基向量。只要原点和基向量选定，就是选定了直

角坐标架。所以以后总是把一个直角坐标架写成 $[O,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$。任何一个向量 $\boldsymbol{F}$ 总可以沿某向量的方向分成三个分向量(图1.5)，它们分别由 $F_x\boldsymbol{i},F_y\boldsymbol{j},F_z\boldsymbol{k}$ 表示，即

$$\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k},$$

其中 F_xF_y,F_z 是代数量。它们可以是正或负，比如 $F_x>0$ 表示 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{i}$ 方向的分向量与 $\boldsymbol{i}$ 方向相同；反之，当 $F_x<0$ 时，则方向相反。我们称 F_x，F_y，F_z 为 $\boldsymbol{F}$ 的三个分量[1]（有时也说在基向量组 $[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$ 中的坐标)。由于 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是正交的单位向量，F_x,F_y,F_z 就是 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 方向的投影。它们可以根据向量投影的定义求出。所以有

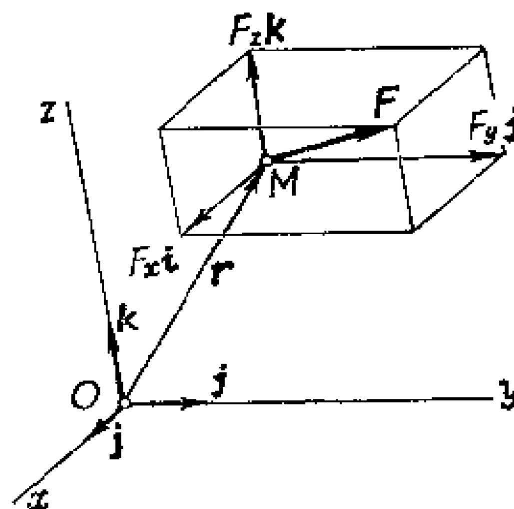


图1.5 向量的分解

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{i}=F_x,\quad \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{j}=F_y,\quad \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{k}=F_z.$$

就是说，**在正交单位向量基中，一个向量的分量（或坐标）等于相应的投影**[2]。

现在来写出主向量 $\boldsymbol{R}$ 的分量表达式，设

$$\boldsymbol{R}=R_x\boldsymbol{i}+R_y\boldsymbol{j}+R_z\boldsymbol{k}.$$

根据式(1.1)将

$$\boldsymbol{F}_i=F_{ix}\boldsymbol{i}+F_{iy}\boldsymbol{j}+F_{iz}\boldsymbol{k}$$

---

① 严格一些说，$F_x\boldsymbol{i},F_y\boldsymbol{j},F_z\boldsymbol{k}$ 这三个分向量的大小，即模（绝对值）分别为 $|F_x|$，$|F_y|$，$|F_z|$，而不是 F_x，F_y，F_z。所以分量不是分向量的大小，而是分向量大小添上适当的正负号。

② 对于非正交向量基没有这样的结论。

代入就得

$$R_x=\sum_{i=1}^{n} F_{ix},\quad R_y=\sum_{i=1}^{n} F_{iy},\quad R_z=\sum_{i=1}^{n} F_{iz}. \tag{1.2}$$

这表明主向量的分量等于各个力的相应分量之代数和。

由向量的性质可知①：

主向量的大小为

$$R=\sqrt{(\sum F_x)^2+(\sum F_y)^2+(\sum F_z)^2}, \tag{1.3}$$

主向量的方向余弦为

$$\begin{aligned}\cos(\boldsymbol{R},\boldsymbol{i})&=(\sum F_x)/R,\\ \cos(\boldsymbol{R},\boldsymbol{j})&=(\sum F_y)/R,\\ \cos(\boldsymbol{R},\boldsymbol{k})&=(\sum F_z)/R.\end{aligned} \tag{1.4}$$

1-2 坐标变换和不变量

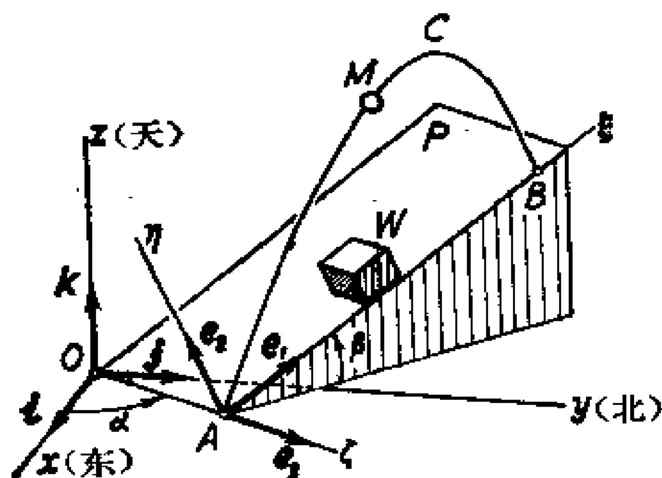


图1.6 同一参考体，不同坐标系

在同一个参考体中，我们可以采用不同的坐标系（或称坐标架）。例如，当我们研究斜坡P上一个物体W的平衡或向着斜坡抛射一个物体M时（图1.6），可以取斜坡上某一点O为坐标原点，东向、北向和天向（竖直向上）分别为基向量$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$的

---

① 为书写简单起见，在不致发生误会的地方，我们通常把$\sum\limits_{i=1}^{n}$简写成$\sum\limits_{i}$或$\sum$，并把F_{ix}，F_{iy}，F_{iz}的下标i略去。

方向。也可以把坐标原点取在发射点 A，而把基向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 分别取成图中所示的方向，即 $\boldsymbol{e}_1$ 沿斜面最大倾斜线 AB，$\boldsymbol{e}_2$ 垂直斜面，$\boldsymbol{e}_3$ 沿斜面上的水平线。尽管这两个坐标系不一样，但都可以用来描述同一个物理现象：比如说物体 W 在斜坡上保持静止，而物体 M 沿着抛物线 ACB 运动。现在我们所关心的问题是：同一个向量在不同坐标系中的分量之间有什么变换关系？向量的哪些性质是不随坐标系的变化而变化的？这些，就是这一节要讲的内容。

设有两个直角坐标系 $[O,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$ 和 $[A,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$。$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 也是一组单位正交基向量。为了方便起见，我们将基向量组 $[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$ 写成 $[\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3]$（图1.7），称为基 **i**。相应地将坐标 x,y,z 写成 x_1^i,x_2^i,x_3^i。基向量组 $[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ 称为基 **e**。相应的坐标 ξ,η,ζ 写成 x_1^e,x_2^e,x_3^e。肩码（如 i 或 e）表明这些坐标或分量是相对哪一个基取的。

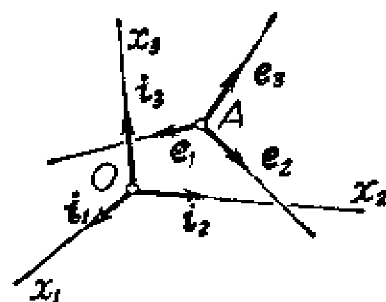


图1.7 两个直角坐标系

基向量 $\boldsymbol{e}_1$ 作为一个向量，就可以在基 **i** 中分解成三个分向量，写成

$$\boldsymbol{e}_1=p_{11}\boldsymbol{i}_1+p_{21}\boldsymbol{i}_2+p_{31}\boldsymbol{i}_3.$$

这里 p_{11},p_{21},p_{31} 是向量 $\boldsymbol{e}_1$ 在基 **i** 中的分量或坐标。因为基 **i** 是单位正交基，所以它们也就是 $\boldsymbol{e}_1$ 在 $\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3$ 方向上的投影。又因 $\boldsymbol{e}_1$ 是单位向量，所以这三个量也就是 $\boldsymbol{e}_1$ 的方向余弦，它们的平方和等于1，即有

$$p_{11}=\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{i}_1,\qquad p_{21}=\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{i}_2,\qquad p_{31}=\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{i}_3;$$

$$p_{11}^2+p_{21}^2+p_{31}^2=1.$$

同样地，对 $\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 也可以写出类似的式子，合起来写成

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_1=p_{11}\boldsymbol{i}_1+p_{21}\boldsymbol{i}_2+p_{31}\boldsymbol{i}_3,\\ \boldsymbol{e}_2=p_{12}\boldsymbol{i}_1+p_{22}\boldsymbol{i}_2+p_{32}\boldsymbol{i}_3,\\ \boldsymbol{e}_3=p_{13}\boldsymbol{i}_1+p_{23}\boldsymbol{i}_2+p_{33}\boldsymbol{i}_3.\end{cases}$$

我们也可以采用矩阵的书写方式：

$$[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]=[\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3]\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

或

$$\mathbf{e}=\mathbf{i}\,\mathbf{P}, \qquad (1.5)$$

其中 $\mathbf{e}$ 和 $\mathbf{i}$ 是行向量阵 $\mathbf{e}=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$，$\mathbf{i}=[\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3]$；$\mathbf{P}$ 称为交换矩阵，它是一个 3×3 阶矩阵。矩阵的元素p_{ij}为：

$$p_{ij}=\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{i}_i \quad (i,j=1,2,3)。$$

也就是说，矩阵 $\mathbf{P}$ 的元素由下面的方向余弦表给出：

方向余弦或点积	$\boldsymbol{e}_1$或 ξ轴	$\boldsymbol{e}_2$或 η轴	$\boldsymbol{e}_3$或 ζ轴
$\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}_1$ 或 x 轴	p_{11}	p_{12}	p_{13}
$\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}_2$ 或 y 轴	p_{21}	p_{22}	p_{23}
$\boldsymbol{k},\boldsymbol{i}_3$ 或 z 轴	p_{31}	p_{32}	p_{33}

因为 $\mathbf{i}$ 是单位正交向量基，因而有：

$$\boldsymbol{i}_k\cdot\boldsymbol{i}_l=\begin{cases} 0, & 当\ k\neq l\ 时, \\ 1, & 当\ k=l\ 时。\end{cases}$$

利用这一点来计算 $\mathbf{i}$ 的转置 $\mathbf{i}^T$ 和它自身的乘积①：

$$\mathbf{i}^T\cdot\mathbf{i}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{i}_1\\ \boldsymbol{i}_2\\ \boldsymbol{i}_3\end{bmatrix}\cdot[\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3]$$

$$=\begin{bmatrix} \boldsymbol{i}_1\cdot\boldsymbol{i}_1 & \boldsymbol{i}_1\cdot\boldsymbol{i}_2 & \boldsymbol{i}_1\cdot\boldsymbol{i}_3 \\ \boldsymbol{i}_2\cdot\boldsymbol{i}_1 & \boldsymbol{i}_2\cdot\boldsymbol{i}_2 & \boldsymbol{i}_2\cdot\boldsymbol{i}_3 \\ \boldsymbol{i}_3\cdot\boldsymbol{i}_1 & \boldsymbol{i}_3\cdot\boldsymbol{i}_2 & \boldsymbol{i}_3\cdot\boldsymbol{i}_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

① 这里是列向量阵与行向量阵的乘积，乘积方阵的每一个元素是相应的向量作点乘。

即$\mathbf{i}^T\cdot\mathbf{i}=\mathbf{I}$，$\mathbf{I}$是单位矩阵。前面已假设，我们选取的$e_1,e_2,e_3$也是单位正交基向量组（简称单位正交基），因而也应有

$$\mathbf{e}^T\cdot\mathbf{e}=\mathbf{I}.$$

将式(1.5)代入得

$$\mathbf{I}=(\mathbf{iP})^T\cdot(\mathbf{iP})=\mathbf{P}^T\mathbf{i}^T\cdot\mathbf{iP}=\mathbf{P}^T\mathbf{P}.$$

由此可知，$\mathbf{P}$ 是一个正交矩阵。**由一个单位正交基到另一个单位正交基的变换矩阵是一个正交矩阵。**

现在考虑一个向量的分量。设向量 $\boldsymbol{F}$ 在 $\mathbf{i}$ 基中可以表示成

$$\boldsymbol{F}=F_1^i\boldsymbol{i}_1+F_2^i\boldsymbol{i}_2+F_3^i\boldsymbol{i}_3, \tag{1.6}$$

其中 F_1^i,F_2^i,F_3^i就是 $\boldsymbol{F}$ 在 $\mathbf{i}$ 基中的各个分量。利用矩阵形式可以写成

$$\boldsymbol{F}=[\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3]\begin{bmatrix}F_1^i\\F_2^i\\F_3^i\end{bmatrix}=\mathbf{iF}^i, \tag{1.7}$$

其中$\mathbf{F}^i$表示一个列矩阵，$\mathbf{F}^i=[F_1^i,F_2^i,F_3^i]^T$。同样地，$\boldsymbol{F}$在$\mathbf{e}$ 基中可以表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}&=F_1^e\boldsymbol{e}_1+F_2^e\boldsymbol{e}_2+F_3^e\boldsymbol{e}_3\\&=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]\begin{bmatrix}F_1^e\\F_2^e\\F_3^e\end{bmatrix}=\mathbf{eF}^e.\end{aligned} \tag{1.8}$$

现在来看两组分量之间的关系。将式(1.5)代入式(1.8)，得

$$\boldsymbol{F}=\mathbf{eF}^e=\mathbf{iPF}^e=\mathbf{i}(\mathbf{PF}^e).$$

将上式与式(1.7)比较，由于一个向量在同一个向量基中的分解是唯一的，故

$$\mathbf{F}^i=\mathbf{PF}^e. \tag{1.9}$$

将上式左乘 $\mathbf{P}^{-1}$ 得

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{F}^i=\mathbf{F}^e\quad 或\quad \mathbf{F}^e=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{F}^i.$$

当基 $\mathbf{i}$ 和基 $\mathbf{e}$ 都是正交单位基时，$\mathbf{P}$ 是正交矩阵，$\mathbf{P}^T$等于$\mathbf{P}^{-1}$。因此有

$$\mathbf{F}^{e}=\mathbf{P}^{T}\mathbf{F}^{i}. \qquad (1.10)$$

上式是一种矩阵表达式，实际上它是

$$\begin{cases} F_1^e=p_{11}F_1^i+p_{21}F_2^i+p_{31}F_3^i, \\ F_2^e=p_{12}F_1^i+p_{22}F_2^i+p_{32}F_3^i, \\ F_3^e=p_{13}F_1^i+p_{23}F_2^i+p_{33}F_3^i. \end{cases}$$

注意上面第一式的三个系数是 p_{11}, p_{21}, p_{31}，而不是 p_{11}, p_{12}, p_{13} 等等。显然，只要熟悉矩阵的运算规则，引用矩阵表达方法要简洁得多。

式(1.9)和(1.10)给出了一个向量（当然也适用于力）在不同坐标系中分量（坐标）之间的关系。由此看出，一般说来，坐标系改变以后，分量是要发生变化的。

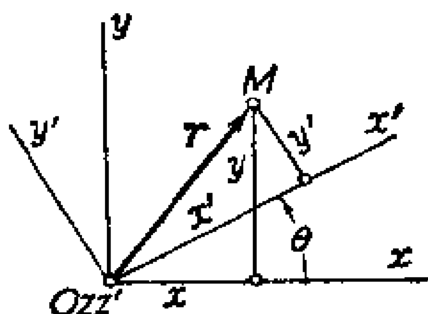


图1.8 坐标轴的转动

＊＊＊① 设将直角坐标系 $Oxyz$ 绕 z 轴转过 θ 角变成 $Ox'y'z'$，写出变换矩阵。对向径 $\overrightarrow{OM}$，写出它在两个坐标系中的分量 (x,y,z) 和 (x',y',z') 之间的关系。＊＊＊

＊＊＊ 设直角坐标系 $O\xi\eta\zeta$ 是由坐标系 $Oxyz$ 三个坐标轴反向（正向变为负向）而得出的，问两坐标系之间的变换矩阵是什么？这个矩阵的行列式等于多少？＊＊＊

＊＊＊ 在斜坡的例子（图1.6）中，斜坡上水平线 OA 沿东北方向，即图中 $\alpha=45°$，斜坡与水平面的夹角为 $\beta=30°$。写出坐标变换矩阵 $\mathbf{P}$。这个矩阵的行列式 $\det\mathbf{P}$ 等于多少？物体 W 的重量为10吨（方向向下），这个力在两个坐标系中的分量各是多少？设 $AB=100$ 米，向量 $\overrightarrow{AB}$ 在两个坐标系中的分量各是多少？＊＊＊

从上面看到，在坐标变换时，向量的分量是在变化的。现在要问有哪些量在坐标变换时是不会变化的？设物体上作用一力系

① ＊＊＊和＊＊＊之间表示思考题或简单练习。

$(\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n)$，它们的主向量是$\boldsymbol{R}=\sum\boldsymbol{F}$，在不同坐标系(基$\mathbf{i}$和基$\mathbf{e}$)中力的分量列矩阵分别是$\mathrm{F}^i$和$\mathrm{F}^e$，主向量$\boldsymbol{R}$的分量列矩阵分别是$\mathrm{R}^i$和$\mathrm{R}^e$。由式(1.2)已知$\mathrm{R}^i=\sum\mathrm{F}^i$，可以证明（见下面的＊＊＊）$\mathrm{R}^e=\sum\mathrm{F}^e$，就是说："力系主向量的分量等于各力分量的代数和"，这个命题不论对于$\mathbf{i}$基或$\mathbf{e}$基都是适用的。或者说，如果这个命题对一个坐标系适用，那么对别的坐标系也适用。

在理论力学中，需要应用数学工具描述某些力学规律。显然，这些（客观的）物理规律不应随坐标系的（主观的）选取而有所变化。因此在数学工具的选用中，我们要强调物理定律对坐标系选取的不变性。采用向量这种数学形式来表达力学量之间的关系，就比用数量（比如随坐标系选取而变化的分量）更适合。

＊＊＊　证明对于任意向量基$\mathbf{e}$（可以是非正交基），主向量的分量列阵等于各力分量列矩阵的代数和，即$\mathrm{R}^e=\sum\mathrm{F}^e$。＊＊＊

在坐标变换中不变化的量叫做**不变量**。主向量的模是坐标变换中的不变量，主向量在已知固定方向上的投影也是不变量，但是主向量在坐标轴上的分量和方向余弦都不是不变量。这些结论从物理意义上来看是很显然的，其数学上的验证也不难，请读者自行完成。

＊＊＊　验证：一个向量的模（大小）对于坐标变换是不变量。（提示：向量$\boldsymbol{F}$的模等于$\sqrt{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}}$，利用变换矩阵的正交性证明它的不变性。）＊＊＊

＊＊＊　验证：两个向量的点积（内积或标量积）$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$对坐标变换是不变量。＊＊＊

主向量的分量不是不变量，但它们是否同时为零，这一性质却与坐标系的选取无关。这一结果在静力学中非常有用。我们有必要专门讨论一下。设主向量$\boldsymbol{R}$在基$\mathbf{i}$中表成$\boldsymbol{R}=\mathbf{i}\mathrm{R}^i$。变换到以$\mathbf{e}$为基的坐标系中，主向量$\boldsymbol{R}$的分量列矩阵$\mathrm{R}^e$一般说来要改变。根据关系式(1.10)，如果$\mathrm{R}^i$为零(即三个分量同时为零)，则必

有 R^* 为零。反之亦然。这样我们就得出结论：

主向量为零的必要且充分条件是，它对于任意一个坐标系的三个分量同时等于零。

可以证明，上面这个结论对于非正交坐标系也是对的。在静力学的实际问题中，我们将会遇到这样的问题，将基 $\mathbf{e}$ 取成非正交的反而对计算比较方便。这时必须注意的是，向量在基向量方向上的分量不再与投影相等。下面以平面情况为例（图1.9）来说

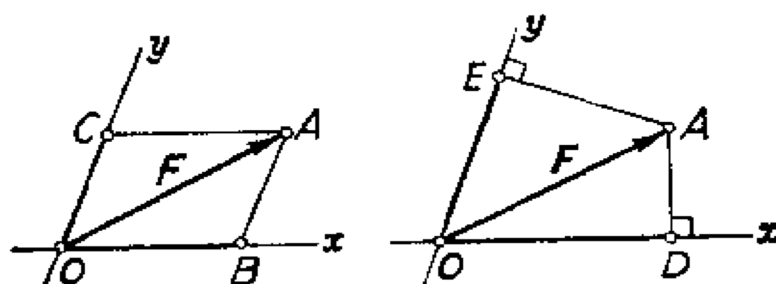


图1.9　分量与投影不同

明这一点。设有一非正交的坐标系 Oxy，一个力（向量）$\boldsymbol{F}$ 在 Ox，Oy 方向分量的大小是 OB 和 OC，而投影的大小是 OD 和 OE。显然它们是不相同的。

我们对一般的向量基略说几句。任意三个相交而线性无关的向量，也即三个相交且不共面的向量，都可以取作向量基。设向量基 $\mathbf{e}=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$（可以是非正交和非单位长的），主向量 $\boldsymbol{R}$ 在这个基中的表示是

$$\boldsymbol{R}=\sum_{i=1}^{3} R_i\boldsymbol{e}_i,$$

其中 $R_1\boldsymbol{e}_1, R_2\boldsymbol{e}_2, R_3\boldsymbol{e}_3$ 是三个分向量，而 $R_i(i=1,2,3)$ 叫做**反变分量**（或**逆变分量**）。反变分量等于相应分向量的大小除以基向量的大小，再加上代表指向的正负号。如果有另一向量基 $\mathbf{e}^*=[\boldsymbol{e}_1^*,\boldsymbol{e}_2^*,\boldsymbol{e}_3^*]$满足关系式

$$\boldsymbol{e}_i^*\cdot\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j^*=\delta_{ij},$$

其中 δ_{ij} 为

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

则 **e*** 称为与 **e** 对应的**倒基**。

设主向量 $\boldsymbol{R}$ 在倒基中的表示是

$$\boldsymbol{R}=\sum_{j=1}^{3} R_j^* \boldsymbol{e}_j^*,$$

其中 $R_j^*\boldsymbol{e}_j^*(j=1,2,3)$ 是主向量沿倒基 $\boldsymbol{e}^*$ 分解而得的三个分向量，R_j^* $(j=1,2,3)$叫做 $\boldsymbol{R}$ 在原来的基 $\boldsymbol{e}$ 中的**共变分量**(或**协变分量**)。

* * *　设Ox,Oy轴相交成60°,Oz轴垂直于Oxy平面。取 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$沿 x,y,z 轴，且 $e_1=2$，$e_2=1$，$e_3=1$。求出倒基向量 $\boldsymbol{e}_1^*$，$\boldsymbol{e}_2^*$，$\boldsymbol{e}_3^*$，验证它们的大小是 $e_1^*=1/\sqrt{3}$，$e_2^*=2/\sqrt{3}$，$e_3^*=1$。设 $\boldsymbol{R}$沿 xOy 的分角线，且 $R=6$。验证它的反变分量是 $R_1=\sqrt{3}$，$R_2=2\sqrt{3}$，$R_3=0$；它的共变分量是 $R_1^*=6\sqrt{3}$，$R_2^*=3\sqrt{3}$，$R_3^*=0$。这里 $\boldsymbol{R}$ 对 Ox 和对 Oy 的关系是相同的，但由于 $e_1:e_2=2:1$，结果 $R_1:R_2=1:2$，$R_1^*:R_2^*=2:1$，这可以作为"反变"和"共变"名称来由的直观解释。* * *

考虑主向量与$\boldsymbol{e}_i(i=1,2,3)$的点积，将上面 $\boldsymbol{R}$ 的表达式代入得

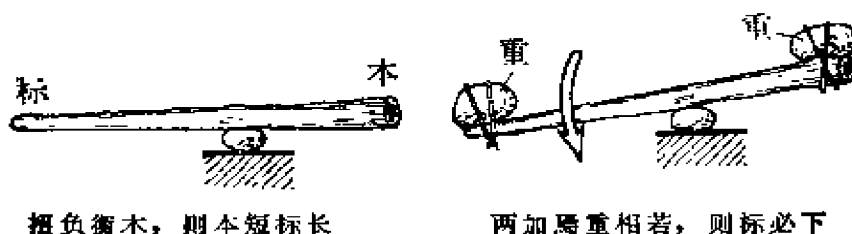
$$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{e}_i=\left(\sum_{j=1}^{3} R_j^*\boldsymbol{e}_j^*\right)\cdot\boldsymbol{e}_i=R_i^*.$$

我们注意到，$\boldsymbol{R}$ 在$\boldsymbol{e}_i$ 上的投影是 $\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{e}_i/|\boldsymbol{e}_i|$，所以共变分量 R_i^* 等于相应向量在 $\boldsymbol{e}_i$ 方向上的投影乘以基向量的大小。如果一向量在一个基上的三个投影等于零，那么它在相应的倒基上的三个分向量等于零。因而根据前面主向量为零的必要且充分条件，可以得出结论：

主向量为零的必要且充分条件是，它在相交且不共面的三轴上的投影同时等于零。

1-3　力矩、力系的主矩

力矩描述了一个力改变物体转动状态的能力。《墨经》上有一段话说："招负衡木（把一根木料横过来平放），则本短（根那一



招负衡木，则本短标长　　　　两加焉重相若，则标必下

图1.10　《墨经》上一段话的意义

头短）标长（梢那一头长）；两加焉重相若（两头加上同样的重量），则标必下——标得权也"（图1.10）。这里的"权"字，隐含着力矩的概念，因为两边力相等，所以力臂长的力矩就大。在中学物理中，我们已知道力矩等于力的大小乘力臂。现在我们要对力矩作进一步的说明，把力矩当作一个向量来处理。

设刚体上有力 $\boldsymbol{F}$，作用于M点（图1.11）。我们定义力 $\boldsymbol{F}$ 对 O 点的力矩为向径$\boldsymbol{r}$ $(=\overrightarrow{OM})$和力向量 $\boldsymbol{F}$ 的向量积（叉积），记作 $\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})$。$O$ 点称为**矩心**。

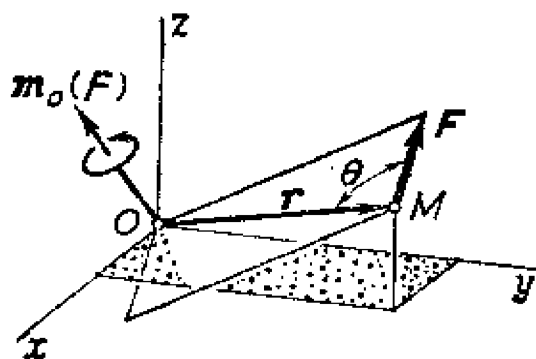


图1.11　力矩

$$\boxed{\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}}$$

如果不致引起别的理解，$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})$ 也可以简写为 $\boldsymbol{m}_O$。力矩是一个向量，与 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 所决定的平面相垂直，指向按右手螺旋法则确定。它的大小是力的大小 F 与从 O 点到力的作用线的垂直距离 d（图中未画出）的乘积。因为

$$|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}|=F\cdot r\sin(\boldsymbol{F},\boldsymbol{r})=F\cdot r\sin(\pi-\theta)$$

$$=F\cdot r\sin\theta=F\cdot d,$$

所以这和"力的大小乘力臂"的说法是一致的。在图中，习惯上把向量 $\boldsymbol{m}_O$ 的起点画在矩心 O 处，但这并没有作用点的意思。

力矩的量纲是[长度]·[力]。在国际单位制(SI)中用牛顿·米(N·m)或千牛顿·米(kN·m)；在工程单位制中用公斤·米(kg·m)或克重厘米(g·cm)等。例如解放牌汽车发动机的最大扭转力矩是31公斤·米。

现在我们计算力矩 $\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})$ 在直角坐标系中的分量(投影)。取直角坐标系$[O,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$，其中原点 O 就取在矩心，则有

$$\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

按照向量叉积的定义，力矩为

$$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x & y & z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}y & z\\ F_y & F_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}z & x\\ F_z & F_x\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}x & y\\ F_x & F_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}.$$

如将 $\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})$ 写成分量形式

$$\boldsymbol{m}_0(\boldsymbol{F})=m_{Ox}\boldsymbol{i}+m_{Oy}\boldsymbol{j}+m_{Oz}\boldsymbol{k}, \tag{1.11}$$

那么

$$\left\{\begin{aligned}m_{Ox}&=\begin{vmatrix}y & z\\ F_y & F_z\end{vmatrix}=yF_z-zF_y,\\ m_{Oy}&=\begin{vmatrix}z & x\\ F_z & F_x\end{vmatrix}=zF_x-xF_z,\\ m_{Oz}&=\begin{vmatrix}x & y\\ F_x & F_y\end{vmatrix}=xF_y-yF_x.\end{aligned}\right. \tag{1.12}$$

考虑其中一个分量 m_{Oz}，我们注意到它和 $\boldsymbol{F}$ 作用点的 z 坐标

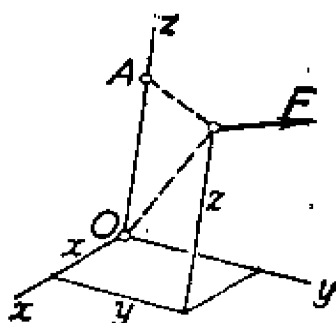


图1.12　$m_{Oz}=m_{Az}$

是无关的。可见，如果把矩心由原来的O点改变到z轴上的任何一点A，那么m_{Az}同样也是这个值(图1.12)，即$m_{Oz}=m_{Az}$。因此，我们可以把这叫做是**力F对z轴的矩**。即把F对z轴上任意点的力矩在z轴上的投影称为F对z轴的矩，写成m_z。同样地，$m_{Ox}=m_x$，$m_{Oy}=m_y$可理解为力对x轴和y轴的矩。

根据式(1.11)可以得到力对点O的矩与力对轴的矩之间的关系

$$\boldsymbol{m}_O=m_x\boldsymbol{i}+m_y\boldsymbol{j}+m_z\boldsymbol{k}.$$

由此看出，力对坐标轴的矩等于力对原点的力矩在坐标轴上的投影。要注意的是力对点的矩是向量，而力对轴的矩是标量。

一般说来，**力对任意轴的矩就是力对这一轴上任一点的矩（向量）在这根轴上的投影**。设力$\boldsymbol{F}$作用在M点，l是任意一根轴，沿轴的单位向量是$\boldsymbol{l}^0$，那么取l轴上任意点C，就有：

$$m_l(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{m}_C(\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{l}^0=(\overrightarrow{CM}\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{l}^0=[\overrightarrow{CM},\boldsymbol{F},\boldsymbol{l}^0].$$

由混合积的性质可知，只有在$\overrightarrow{CM},\boldsymbol{F},\boldsymbol{l}^0$三者两两互相垂直时，$m_l$的数值才等于$\overrightarrow{CM}\times F$的数值。这就是前面所说过的力矩等于力的大小乘力臂的情形。比如说$\overrightarrow{CM}$与$\boldsymbol{F}$都在纸面上，并且互相垂直（图1.13），$\boldsymbol{l}^0$垂直于纸面指向外(用符号⊙表示；若为垂直纸面指向里的单位向量，用符号⊗表示)，则$\boldsymbol{F}$对轴l的矩就等于力的大小F与力臂$\overline{CM}$的乘积。

力对轴的矩是力使物体绕这根轴转动效应的一种度量。如果力的作用线和轴相交或者平行，则力对该轴的矩为零，即沒有转

动的效应。反之，为了使力有绕某一轴转动的效应，即力对轴的矩不等于零，则力与轴必须既不相交也不平行。

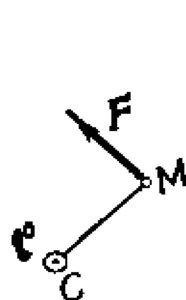


图1.13 力矩＝力·力臂

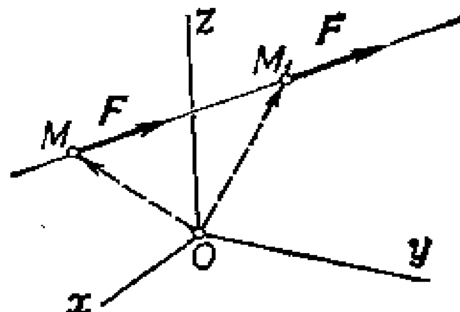


图1.14 力沿作用线移动，力矩不变

在计算力矩时，可以把力沿着它的作用线随意地移动而不影响计算结果①。这是因为，设力 $\boldsymbol{F}$ 的作用点在 M（图1.14），在力的作用线上任选一点 M_1，并将 $\boldsymbol{F}$ 的作用点移到 M_1 点，因为 $\overrightarrow{MM_1}\times\boldsymbol{F}=0$，所以有

$$\overrightarrow{OM_1}\times\boldsymbol{F}=(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MM_1})\times\boldsymbol{F}$$
$$=\overrightarrow{OM}\times\boldsymbol{F}+\overrightarrow{MM_1}\times\boldsymbol{F}=\overrightarrow{OM}\times\boldsymbol{F}.$$

＊＊＊ 证明：一个不为零的力对轴的矩为零的必要且充分条件是，力的作用线与轴共面。＊＊＊

设有一共点力系 $(\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n)$。其共同作用点是 M，$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$。这个力系有一个合力 $\boldsymbol{F}$，即$\boldsymbol{F}=\sum\boldsymbol{F}_i$，作用点仍在 M 点。于是合力 $\boldsymbol{F}$ 对 O 点的矩为

$$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{r}\times\sum\boldsymbol{F}_i=\sum(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_i),$$

即

$$\boxed{\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})=\sum\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_i).}$$

这个式子表明，共点力系合力的矩等于各个力对同一点矩的向量

① 后面（图1.19）将说明这种移动只在刚体上才是允许的。这里单就力矩计算而言。

和。把这一关系式投影到某一轴上，比如说 z 轴，得到 $m_z(\boldsymbol{F})=\sum m_z(\boldsymbol{F}_i)$。即共点力系合力对轴的矩等于各力对同一轴矩的代数和。这一结果称为**伐里农**(Varignon, 1654—1722)**定理**。利用它可以简化力矩的计算。比如在图 1.15(a)中，我们将一个力$\boldsymbol{F}$ 在

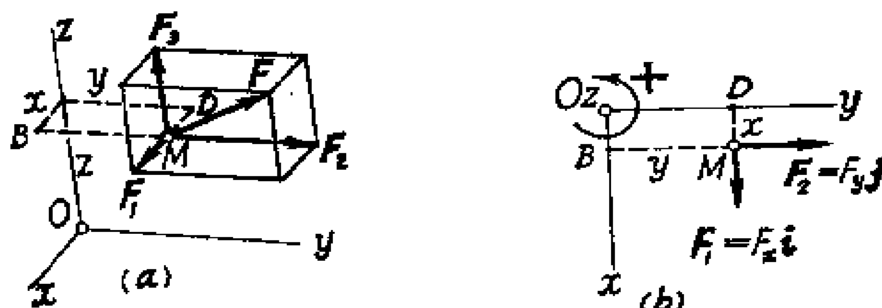


图1.15 伐里农定理的应用

$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 三个方向分解成为三个分力 $\boldsymbol{F}_1=F_x\boldsymbol{i},\boldsymbol{F}_2=F_y\boldsymbol{j},\boldsymbol{F}_3=F_z\boldsymbol{k}$。三个力作用点都在 M 点。力 $\boldsymbol{F}_3$ 对 z 轴沒有力矩(为什么?)，$\boldsymbol{F}_2$ 对 z 轴的矩数值是 $\overline{DM}$ 与 F_y 数值的乘积(力臂乘以力的大小)，其正负号由转动指向决定：从 z 轴的正方向向负方向看去，逆时针转动时为正；反之为负(图1.15(b))。于是得到 $m_z(\boldsymbol{F}_2)=+F_y x$。同样可得 $m_z(\boldsymbol{F}_1)=-F_x y$(注意负号)。故由伐里农定理得 $m_z(\boldsymbol{F})=F_y x-F_x y$。这和公式(1.12)所得的结果一致，但更符合于直观形象。读者试用同样的方法求出 $m_x(\boldsymbol{F})$ 和 $m_y(\boldsymbol{F})$。

在一般的力系中，不一定存在合力，因此谈不上求合力的矩。但是我们可以把对共点力系求力矩的向量和的思想推广到一般力系上去。设物体上有力系$(\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n)$，其作用点分别为 M_1，$M_2,\cdots,M_n$，向径分别为 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n$。取坐标原点 O 为矩心，每个力对此矩心都有一个矩 $\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_1),\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_2),\cdots,\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_n)$。我们求出它们的向量和并称之为力系的**主矩**，用向量 $\boldsymbol{L}_O$ 表示：

$$\boldsymbol{L}_O=\sum_i \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_i)=\sum_i \boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i. \qquad (1.13)$$

主矩 $\boldsymbol{L}_O$ 和上一节所说的主向量 $\boldsymbol{R}=\sum\boldsymbol{F}_i$ 一起，是力系的两个基本特征量。在学完动力学以后就会清楚这两个量怎样决定物体运动的变化规律(包括平衡或维持静止)。

一个力系的主向量只有一种算法，而主矩却依赖于矩心的选择。比如矩心由 O 改成 A 时(图1.16)，$\boldsymbol{L}_O$ 将改变成

$$\boldsymbol{L}_A=\sum\boldsymbol{m}_A(\boldsymbol{F}_i),$$

其中 $\boldsymbol{m}_A(\boldsymbol{F}_i)=\overrightarrow{AM}_i\times\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{r}'_i\times\boldsymbol{F}_i$。于是

$$\boldsymbol{L}_O=\sum_i\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i=\sum_i(\boldsymbol{r}'_i+\overrightarrow{OA})\times\boldsymbol{F}_i$$

$$=\sum_i(\boldsymbol{r}'_i\times\boldsymbol{F}_i)+\overrightarrow{OA}\times\sum_i\boldsymbol{F}_i.$$

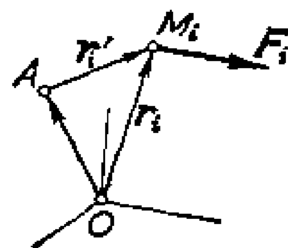


图 1.16 主矩与矩心有关

因为 $\sum_i\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{R}$，所以有

$$\boxed{\boldsymbol{L}_O=\boldsymbol{L}_A+\overrightarrow{OA}\times\boldsymbol{R}}\qquad(1.14)$$

只有在两种情况下 $\boldsymbol{L}_O$ 和 $\boldsymbol{L}_A$ 才是一样的，或者是主向量 $\boldsymbol{R}$ 为零，或者是 A 取得很特别，使 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\boldsymbol{R}$ 平行。除此以外，对于不同的矩心，主矩是不相同的。因此我们说力系的主矩时，必须说明对哪一点的主矩，即必须说明矩心。

* * * 边长为 a 的正三角形薄板 ABC 上有三个力，作用点分别为 A,B 和 C，方向分别沿 AB,BC 和 CA，三个力的大小均为 Q。求这个力系的主向量、对 A 点的主矩和对三角形中心 O 的主矩。* * *

* * * 力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 分别作用于长方六面体顶点(图1.17) A 和 B 处，大小都是 F，方向如图所示。设尺寸 a,b,c 为已知。求力系的主向量、对 O 点的主矩和对 A 点的主矩。* * *

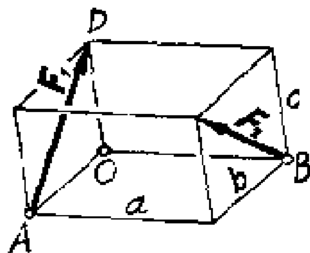


图1.17 求主向量和主矩

1-4 等效力系

在前两节中已讲到，共点力系的合力等于它的主向量。根据伐里农定理，合力对矩心的矩就是力系的主矩。这就是说，有这样两个力系：一个是共点力系；一个是只有一个力（就是那个合力）的力系。这两个力系的主向量相同，对于同一矩心的主矩相同。从对物体的力学效果（改变运动，保持平衡）来看，共点力系和一个合力的作用效果是一样的。如果两个力系对刚体产生同样的力学效果(运动、平衡、约束反力等)，则称为**等效力系**。因此共点力系和它的合力是等效力系。下面我们研究对任意一个力系能否以更简单的等效力系来代替。

先考虑一个由大小相同，方向相反，共线的两个力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 所组成的力系。如果这两个力作用于同一个点，那么可用共点力系方法求出它们的合力为零。这两个力对物体起的作用就同不加任何力(简称**零力系**)一样，即等效。如果这两个力的作用点不相同（图1.18），设分别为 M_1 和 M_2。设想物体是一个弹簧，在力系($\boldsymbol{F}_1$,$\boldsymbol{F}_2$)的作用下，弹簧就要伸长，显然这与零力系不等效。所以我们在研究这个弹簧时，不能说力系($\boldsymbol{F}_1$,$\boldsymbol{F}_2$)的合力为零。但是，如果所考虑的物体是刚体，即两点间距离是不变的，那么力系($\boldsymbol{F}_1$,$\boldsymbol{F}_2$)对刚体的作用和零力系等效。由此可见，力系的等效性与物体本身的性质有关。因此我们要强调在以后讨论力系的等效性时，只限于刚体。

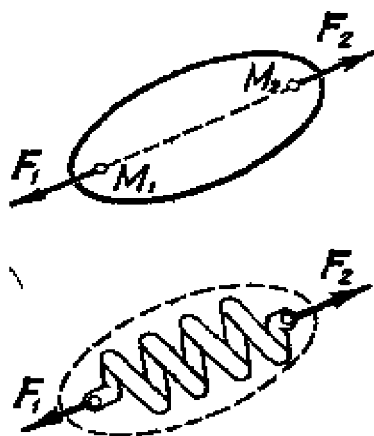


图1.18 力系($\boldsymbol{F}_1$,$\boldsymbol{F}_2$)是否与零等效?

在动力学中将知道，一个刚体在惯性参考系中能否保持静止状态，即刚体上力系是否平衡，取决于作用在刚体上的力系的

主向量和主矩是否为零。我们也还将知道，自由刚体运动状态的变化取决于力系的主向量和对于刚体质心的主矩。对于有一个固定点的刚体来说，刚体的运动状态的变化以及固定点处的反力也完全取决于力系的主向量和对固定点的主矩。本书先讨论静力学，后讨论动力学，所以我们就以下面的**等效力系基本定理**作为目前讨论的出发点①。

定理　两个力系等效的条件是主向量相等，对同一点的主矩相等。

下面根据这个等效力系基本定理来阐明刚体静力学中力系的许多性质。中心的问题是找到较简单的等效力系来代替一个已知的力系。

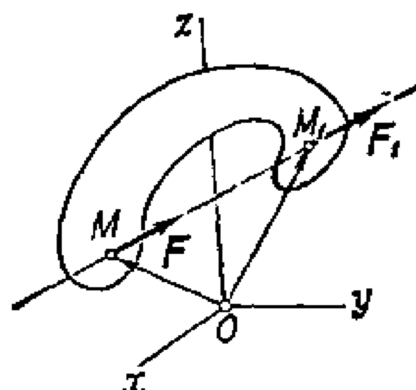


图1.19　力的可传性

力在刚体上的可传性：一个力 $\boldsymbol{F}$ 作用于刚体上的 M 点（图1.19），将这个力沿它的作用线移动，使它的作用点移到同一个刚体上的 M_1 点，并保持其大小和方向不变，记作 $\boldsymbol{F}_1$。我们把 $\boldsymbol{F}$ 看成一个力系（只有一个力），把 $\boldsymbol{F}_1$ 看成另外一个力系（也只有一个力），这两个力系虽然不同，但因为它们的主向量相等，对同一点 O 的主矩相等，所以它们是等效力系。由此可见，作用在刚体上的一个力，沿着其作用线移动时，不会改变力的作用效果，好象力可以在刚体上传递。所以，作用在刚体上的力的三个要素：大小、作用点和方向，可以改为**大小、作用线和指向**②。今后在解刚体的平衡问题时，不必强调力的作用点，只要把它的大小、作用线

---

① 从逻辑上说，这个定理的根据是牛顿定律．只要承认牛顿定律是普遍的力学规律，就可以推论出这个定理（见动力学）．目前，我们不妨把它当作静力学的基本定理看待．

② 沿同一作用线，力可以有两种指向．作用线的方向要用两个数表示，而指向可用正负号表示，即任意选定一个指向为正，则反之为负．

和指向交待清楚就可以了。

如果一个力系和一个力等效，就叫这个力为力系的**合力**。前面已说过共点力系与其合力等效。如果这个合力为零，我们就说共点力系与零力系等效，简称**与零等效**。一个共点力系的合力，可由力系中的各个力依次相加（向量相加）所得，这就相当于由 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$ 首尾相接，组成一个开口的力多边形（图1.20）。将 $\boldsymbol{F}_1$ 的起点与 $\boldsymbol{F}_n$ 的终点相联就得到合力 $\boldsymbol{F}$。显然，若力系与零等效，必定要有 $\boldsymbol{F}_1$ 的起点与 $\boldsymbol{F}_n$ 的终点相重合（$\boldsymbol{F}=0$），即构成的力多边形是封闭的。

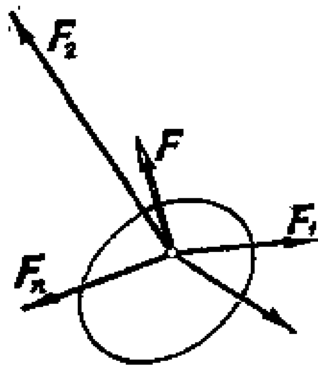


图1.20 力多边形

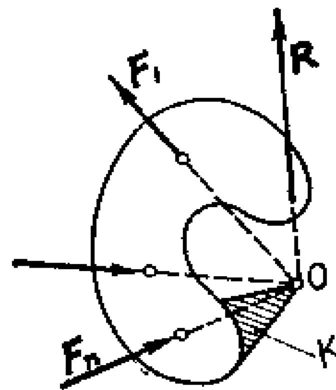


图1.21 汇交力系有合力

如果力系中每一个力的作用线都经过一个共同点，这个力系叫做**汇交力系**。根据力的可传性，可以把所有的力的作用点，沿着作用线"滑"到这个汇交点 O 处（图1.21）。如果这个汇交点不在刚体内，可以设想把刚体"延拓"（想象有一个虚设的刚性架子 K，把这点与刚体连在一起）。这样，汇交力系变成为共点力系。因此，汇交力系有一个合力 $\boldsymbol{R}$，其大小和方向与主向量相同，其作用线经过汇交点。

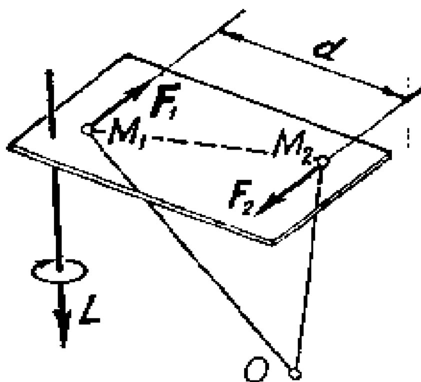


图1.22 力偶、力偶矩

大小相等、方向相反、作用

线平行的两个力组成的力系叫做**力偶**（图1.22），即力偶$(\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2)$中$\boldsymbol{F}_1=-\boldsymbol{F}_2$。所以力偶的主向量为$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=0$。它对$O$点的主矩为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{L}_O &= \overrightarrow{OM}_1\times\boldsymbol{F}_1+\overrightarrow{OM}_2\times\boldsymbol{F}_2\\
&= -\overrightarrow{OM}_1\times\boldsymbol{F}_2+\overrightarrow{OM}_2\times\boldsymbol{F}_2\\
&= (\overrightarrow{OM}_2-\overrightarrow{OM}_1)\times\boldsymbol{F}_2\\
&= \overrightarrow{M_1M_2}\times\boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{m}_{M_1}(\boldsymbol{F}_2).
\end{aligned}
$$

可见，**力偶的主矩与矩心无关。**我们把力偶对任一点的主矩叫做**力偶矩**，用$\boldsymbol{L}$（不必再标明矩心O）表示。于是$|\boldsymbol{L}|=|\overrightarrow{M_1M_2}\times\boldsymbol{F}_2|=Fd$，其中$F$是$\boldsymbol{F}_1$和$\boldsymbol{F}_2$的共同大小，$d$是两作用线之间的距离。如$d=0$，则$\boldsymbol{L}=0$。这个力偶的主向量为零，主矩也为零，则这个力偶等效于零。如$d\neq0$，则$\boldsymbol{L}$的方向垂直于两个作用线所决定的平面，其指向由右手规则确定。

力偶（当力偶矩$\neq0$时）不可能与一个力等效。用反证法证明如下：设它与一个不为零的力$\boldsymbol{F}$等效，取其作用线上任意点为矩心，则主矩为零。但是，已知力偶的主矩不为零，又因为力偶矩与矩心无关，所以力偶对于任意点的主矩都不能为零。这与假设的推论发生矛盾，因此假设不能成立。所以，力偶是最简单的力系之一，不要企图再将一个力偶作进一步的简化。力偶可能与另外一个力偶等效，只要它们的力偶矩相等。对于一个力偶来说，我们并不关心其中每一个力的大小和作用线的位置，只需要指明它的力偶矩的大小和方向这两个要素就可以了。因此，有时在图上只要画出力偶矩向量$\boldsymbol{L}$，或者用与$\boldsymbol{L}$垂直的一个平面上的带箭头的圆弧段来代表。在一个刚体上力偶可以在同一平面内随便搬移，也可以从一个平面搬到另一个与之平行的平面上。只要保持力偶矩不变，则搬动前后的力偶都是等效的（图1.23）。

必须再一次提醒，我们所说的等效，只是对作用于同一个刚体上的不同力系而言的。因此上述的力偶的搬移不能用到变形体

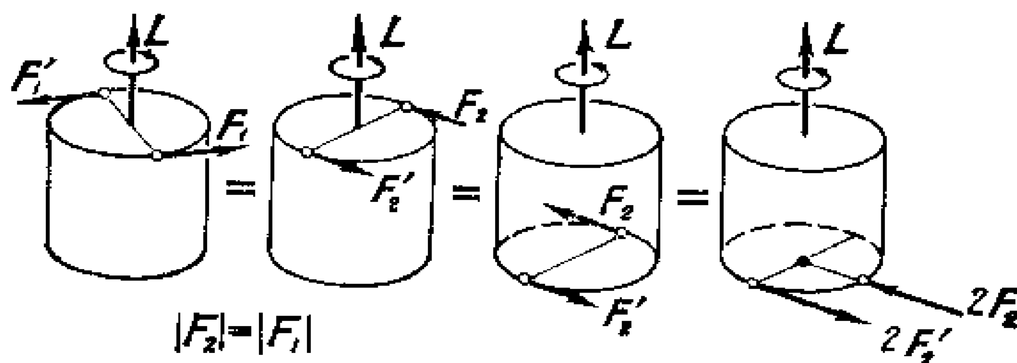


图1.23 力偶在刚体上的搬移

上去。例如，对图1.24中的弹性薄片，如果上端受到圆弧平面内的一个力偶时，全部高度将受到扭曲；如果把这个力偶平行地移到一半高度处，则只有下半段受到扭曲，而上半段仍是平整的。尽管这两个力偶的矩是相等的，但效果(变形)不一样。

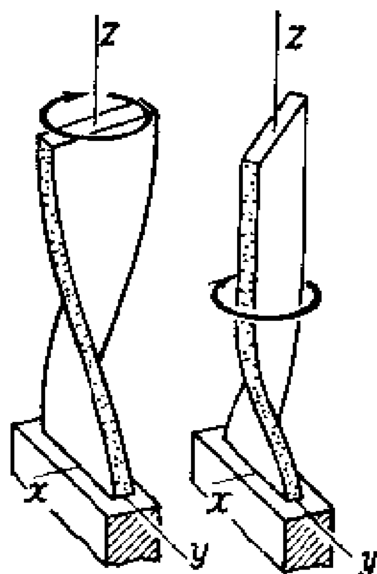


图1.24 力偶矩相等，变形不同

由许多力偶组成的力系称为**力偶系**。力偶系与一个力偶等效，因为力偶系的主向量为零，力偶系的主矩就等于力系中各个力偶矩的向量和，称为**合力偶矩**。在与合力偶矩垂直的任意平面上，所有力偶矩等于这合力偶矩的其他力偶，都与原力偶系等效。总之，从上述讨论可见，一个力偶和一个力一样是最简单的力系之一，无法再化简(除非与零等效)。

一个与零力系等效的力系叫做**平衡力系**。零力系的主向量和主矩显然是零。就是说，如果一个力系主向量为零，主矩为零①，则它就与零力系等效，即为平衡力系。

① 当主向量为零时，根据式(1.14)可知对于任意点的主矩都是相等的，因此只要对某一点主矩为零，那么对任意点的主矩都为零．所以在这里没有必要强调对那一点主矩为零．

原来静止的刚体在附加平衡力系的作用下，能够继续保持静止状态。显然，对一个力系增加一个平衡力系或者减少一个平衡力系后，都等效于原来的力系。因为增加或减少平衡力系对于力系的主向量和主矩不发生任何影响。

前面讲过力的可传性，即作用在刚体上的力沿其作用线可以随意滑动。自然要问，作用在刚体上的力，作用线是不是可以平行地搬动一下？如果可以的话，我们不是可以将任意力系通过"搬来搬去，滑来滑去"的办法都简化成一个共点力系，然后再合成一个合力吗？可惜回答是否定的。必须牢记："滑来滑去"是可以的；"搬来搬去"却不行！我们来看一看平行地搬动一个力的作用线以后，它等效于什么？设有一力 $\boldsymbol{F}$，作用点为 M（图1.25），我们想把它搬到 M_1 点去，可以在 M_1 处加上一对相互平衡的力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$，使 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 都与 $\boldsymbol{F}$ 平行，且大小都相等。新的力系由三个力构成，它与原来的力系等效。可以把新力系看成这

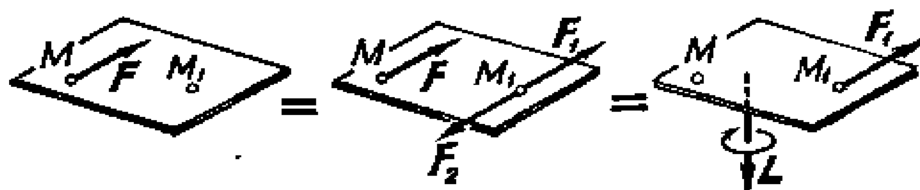


图1.25　力作用线的平行搬移

样两个力系之和：$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 构成的力偶；作用在 M_1 点的力 $\boldsymbol{F}_1$。这就是说，要搬动一下力的作用线，必须加一个力偶，才能前后等效。

＊＊＊　在什么情况下一个力和一个力偶可以合成一个合力？（提示：应用上面讨论力作用线搬动的手法来考虑）＊＊＊

1-5　力系的简化

对于任意一个包含有 n 个力的力系（$\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$），我们已

经会计算它的主向量和对某一点的主矩。如果我们把矩心取在坐标原点O，则主向量$\boldsymbol{R}=\sum \boldsymbol{F}_i$，对O点的主矩为$\boldsymbol{L}_O=\sum \boldsymbol{r}_i\times \boldsymbol{F}_i$，其中$\boldsymbol{r}_i$是力$\boldsymbol{F}_i$的作用点的向径(图1.26)。对于上述力系，我们总可以用一个等效力系来代替它，这个新的力系由一个作用在O点的力和一个力偶构成。这个力的大小和方向与主向量$\boldsymbol{R}$相同，这个力偶的矩等于主矩$\boldsymbol{L}_O$。换句话说，我们把力系($\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，…，

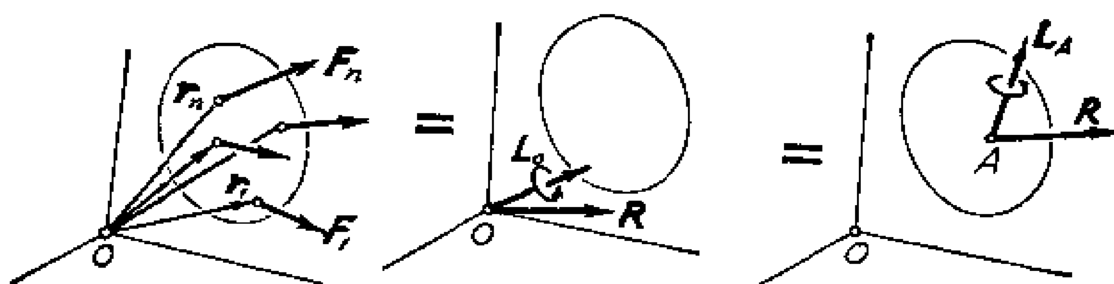


图1.26 一力系以某一点为矩心的简化

$\boldsymbol{F}_n$）以O点为矩心进行了简化。O点叫做力系的**化简中心**。如果我们以另一点A为化简中心，则在新的等效力系中，作用在A点的力的大小和方向仍然与主向量$\boldsymbol{R}$相同，但力偶不同了，它的矩等于力系对A点的主矩$\boldsymbol{L}_A$(图1.26)。对于不同化简中心的主矩$\boldsymbol{L}_O$和$\boldsymbol{L}_A$的关系由式(1.14)给出。

我们看到，当一个力系给定以后，它的主向量就唯一确定了，不会因为化简中心的不同而有所变化。所以主向量是力系化简过程中的一个不变量。主矩就没有这样的性质，它将随着化简中心的不同而变化。但是，主向量和主矩的点积却是另一个不变量，它不随化简中心的不同而变化。这是因为

$$\boldsymbol{L}_O\cdot\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{L}_A+\overrightarrow{OA}\times\boldsymbol{R})\cdot\boldsymbol{R}=\boldsymbol{L}_A\cdot\boldsymbol{R}.$$

我们把这个$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{R}$($\boldsymbol{L}$的矩心可以是任意一点)叫做**第二不变量**，而把$\boldsymbol{R}$叫做**第一不变量**。当然，如果第一不变量为零，即$\boldsymbol{R}=0$，则第二不变量将随之为零，即$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{L}=0$。但是，第二不变量为零

时，有四种可能的情形，分别说明如下：

(1) $\boldsymbol{R}=0$，且对某一化简中心O的主矩 $\boldsymbol{L}_O=0$。于是这个力系与零力系等效，这是一个**平衡力系**。

(2) $\boldsymbol{R}=0$，但$\boldsymbol{L}_O\neq0$。于是由式(1.14)，对任意化简中心A的主矩$\boldsymbol{L}_A=\boldsymbol{L}_O$。这个力系和一个力偶矩等于$\boldsymbol{L}_O$的力偶等效，或者说，力系合成为一个力偶。这个力偶叫做**合力偶**。

(3) $\boldsymbol{R}\neq0$，而 $\boldsymbol{L}_O=0$。力系等效于经过化简中心O的一个力$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}$，即力系合成为一个力。这个力叫做**合力**。

(4) $\boldsymbol{R}\neq0$，$\boldsymbol{L}_O\neq0$，但$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{L}_O=0$，即$\boldsymbol{R}$与$\boldsymbol{L}_O$互相垂直。这时可以找到另一个化简中心$A$，使力系对于新的化简中心$A$的主矩$\boldsymbol{L}_A=0$。于是力系合成为一个力$\boldsymbol{F}$。这个合力经过$A$点，且$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}$(图1.27)。读者试证明：

$$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{L}_O/R^2 \tag{1.15}$$

以上我们看到，在第二不变量等于零时，力系简化的结果只有三种可能：零、合力和合力偶。在第二不变量不等于零时，一个力系肯定不能合成为以上三种情况中的一种，因为这三种情况的第二不变量都等于零。下面我们就来分析这种情况。

(5) $\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{L}\neq0$。我们把力系对某一化简中心$O$点的主矩$\boldsymbol{L}_O$分解为平行于主向量$\boldsymbol{R}$的分量$\boldsymbol{L}^*$和垂直于$\boldsymbol{R}$的分量$\boldsymbol{L}_{On}$(图

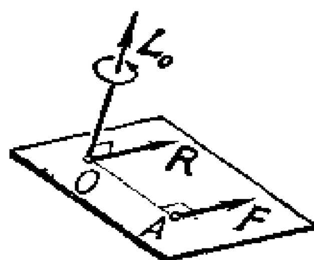


图1.27　$\boldsymbol{R}\neq0$，$\boldsymbol{L}_O\neq0$，但$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{L}_O=0$的情况

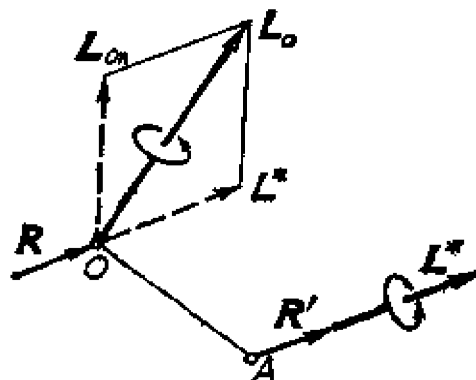


图1.28　主矩$\boldsymbol{L}_O$分解为$\boldsymbol{L}^*$和$\boldsymbol{L}_{On}$，选择化简中心A，使得$\boldsymbol{L}_{An}=0$

1.28)。设

$$L^* = pR, \qquad (1.16)$$

p 的量纲是长度，则不难求得

$$p = \frac{R \cdot L}{R^2}. \qquad (1.17)$$

可见，p 以及 L^* 都完全由第一和第二不变量确定，因而不随化简中心的不同而变化。和情况(4)中一样，我们可以选取这样的化简中心 A，使得

$$\overrightarrow{OA} = R \times L_{On}/R^2 = R \times L_O/R^2.$$

于是，力系对 A 点主矩 L_A 的垂直分量 $L_{An} = 0$。这时，新的等效力系只包含一个力和一个力偶：力 F 的作用点在 A 点，其大小和方向与主向量 R 相同；力偶的力偶矩等于 L^*，其方向与主向量平行。这种力系叫做**力螺旋**(图1.29)。式(1.16)中的 p 叫做**力螺旋参数**。由此可知，对于第二不变量不为零的力系，最后总可以化简成一个力螺旋①。在力螺旋中，力的作用点沿着主向量的方向可以任意滑动而不会改变力系的等效性。

力螺旋中力的作用线也叫做**中心轴**，现在我们求它的方程。对中心轴上任一点 M (图1.30) 都有

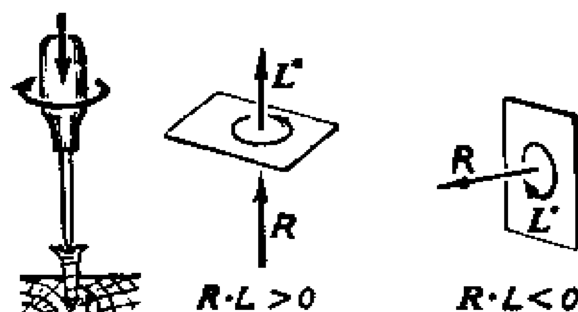


图1.29 力螺旋

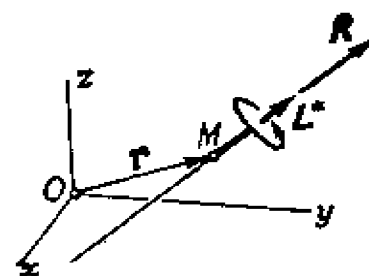


图1.30 中心轴

① 力螺旋可以与两个不相交、不平行、大小相等的力等效，见习题1.14。

$$\boldsymbol{L}_M=\boldsymbol{L}^*=p\boldsymbol{R}.$$

但由式(1.14)，

$$\boldsymbol{L}_O=\boldsymbol{L}_M+\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{R},$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 是M点的向径，$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$，故

$$\boldsymbol{L}_O-\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{R}=p\boldsymbol{R}.$$

它是中心轴的向量表示式。用直角坐标(x,y,z)表示，它是

$$\frac{L_{Ox}-(yR_z-zR_y)}{R_x}=\frac{L_{Oy}-(zR_x-xR_z)}{R_y}$$

$$=\frac{L_{Oz}-(xR_y-yR_x)}{R_z}=p. \qquad (1.18)$$

＊＊＊　设第二不变量不为零，证明对中心轴上点M的主矩大小总是小于不在中心轴上的点的主矩，即 $L^*=\min L$。＊＊＊

我们把以上讨论的一般力系简化的五种情况归纳为下表：

	主向量 $\boldsymbol{R}=0$	主向量 $\boldsymbol{R}\neq 0$	
主　矩 $\boldsymbol{L}_O=0$	(1) 力系平衡	(3) 合成为经过化简中心 O 点的合力 $\boldsymbol{R}$	
主　矩 $\boldsymbol{L}_O\neq 0$	(2) 合为成一力偶，其力偶矩为 $\boldsymbol{L}_O$	(4) $\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{L}_O=0$，合成为一力 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}$，其作用线经过向径为 $\frac{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{L}_O}{R^2}$ 的点	(5) $\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{L}\neq 0$，简化成为力螺旋（或见上页注①）

总之，对于任意力系，总可以或者简化成为一个力螺旋，或者合成为一个合力或一个合力偶，或者平衡。下面我们举两个例子——简单的平衡条件和平行力系中心。

两力平衡和三力平衡的条件　力系平衡的一般条件是以某一点O为矩心简化时，$\boldsymbol{R}=0$，$\boldsymbol{L}_O=0$。如果平衡力系中只有两个力，则由主向量 $\boldsymbol{R}=0$，要求两个力大小相等，方向相反。由主矩 $\boldsymbol{L}_O=0$，要求两个力的作用线相同。所以两力平衡的条件是两

力相等、反向、共线。如果平衡力系中有三个力，可以证明（见习题1.13），如三力平衡，则三力作用线一定共面。我们暂不考虑三个力共面且都平行的情况，而设其中有两个力的作用线相交，并证明第三个力一定经过这两个力作用线的交点，即**平衡三力或者共面平行，或者共面汇交。**我们将力系中作用线相交的两个力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 沿作用线滑到相交点O，然后将 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 合成一个过O点的合力 $\boldsymbol{F}_{12}$（图1.31）。新的等效力系只有两个力 $\boldsymbol{F}_{12}$ 和 $\boldsymbol{F}_3$。根据两力平衡条件，它们的作用线必须相同，因此 $\boldsymbol{F}_3$ 必须经过O点。所以，不平行的三个力组成的力系与零等效的必要且充分条件是：三力汇交且 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3$ 能首尾相接组成一个封闭的三角形（这表示合力为零）。这个**三力平衡条件**（共中两个力不平行）在解决平衡问题时经常被用到。

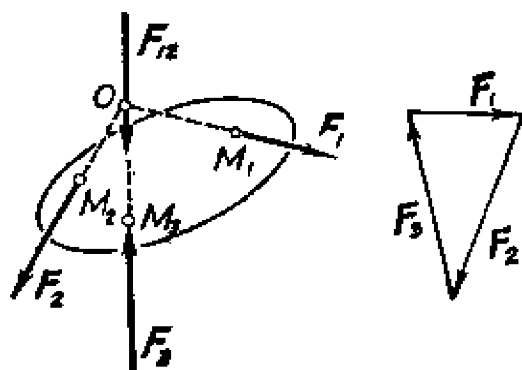


图1.31　三力平衡条件

其他更为复杂的平衡力系将在以后各节中详细讨论。

平行力系的中心　作用线都相互平行的力所组成的力系叫做**平行力系。**不失一般性，假定它们都平行于 z 轴。于是力系的主向量 $\boldsymbol{R}=R_z\boldsymbol{k}$，而 $R_z=\sum F_z$。每个力对O点的矩 $\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i$ 都垂直于 z 轴，因而 $\boldsymbol{L}_O$ 垂直于 z 轴，故第二不变量 $\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{L}_O$ 总为零。所以平行力系简化的结果只可能是零或合力或力偶。

现在我们详细分析平行力系有合力的情况，即 $\boldsymbol{R}\neq0$ 的情况。设一个力系由两个同向的平行力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 组成。两力分别经过 A 点和 B 点（图1.32）。我们在 AB 线上选择一点 C 作为化简中心。对 C 点来说，力系的主矩（向量）垂直于纸面，大小为 $L=F_1d_1-F_2d_2$。我们适当地选择 C 的位置使 $L=0$，即选取 C 使得

$F_1 \cdot \overline{AC} = F_2 \cdot \overline{BC}$。那么，力系就与经过$C$点的一个力等效。这力就是合力$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$。这一结论是人们在日常生活中所熟悉的。设有一小棍（重量不计），两头分别固定着重量不同的重物，就相当于在A和B两点作用有垂直向下的重力（地心引力），这两个力可以在棍中间某一点合成一个合力。我们只需在这一点施加一个垂直向上的外力，比如用手指支撑着这一点，那么整个棍就平衡了。我们使用的杆秤就是这种情况。

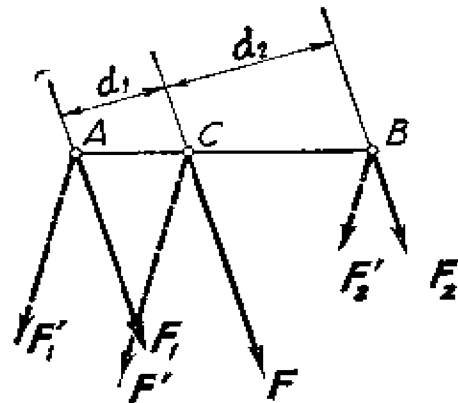


图1.32　平行力的合力

对于由两个反向平行力组成的力系，只要两力大小不相等，也可以用类似的方法找出合力和合力的作用线。这时合力作用线所经过的C点将落在AB的外侧。

如果将$\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$各转过一个角度成为$\boldsymbol{F}_1', \boldsymbol{F}_2'$，但大小仍不变，即$F_1' = F_1$，$F_2' = F_2$，且两力保持同向（图1.32），则不难看出，合力$\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F}_1' + \boldsymbol{F}_2'$仍然经过$C$点。作用点固定、大小固定的两个同向平行力，在其方向任意变动时，其合力必定经过的这个C点，叫做两个平行力的中心。

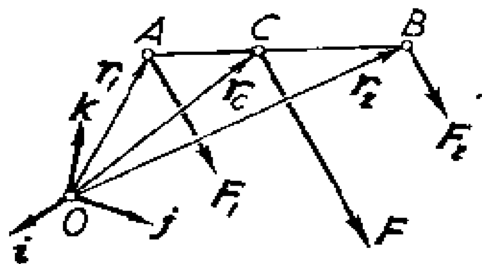


图1.33　平行力的中心

下面我们计算平行力中心C点的坐标。取直角坐标系$[O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}]$（图1.33）。向径$\boldsymbol{r}_1 = \overrightarrow{OA}$，向径$\boldsymbol{r}_2 = \overrightarrow{OB}$，分别可以表成

$$\boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{r}_2 = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}.$$

设C点的向径$\boldsymbol{r}_C = x_C\boldsymbol{i} + y_C\boldsymbol{j} + z_C\boldsymbol{k}$。于是令$C$点的主矩$\boldsymbol{L}_C$为零，得出

$$\boldsymbol{L}_C=\overrightarrow{CA}\times\boldsymbol{F}_1+\overrightarrow{CB}\times\boldsymbol{F}_2=0.$$

因为$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_C$，$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_C$，代入上式得

$$\boldsymbol{r}_C\times(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)=\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{F}_2.$$

假定平行力$\boldsymbol{F}_1$和$\boldsymbol{F}_2$的方向用单位向量$\boldsymbol{l}^0$表示，则上式成为

$$\boldsymbol{r}_C\times(F_1+F_2)\boldsymbol{l}^0=\boldsymbol{r}_1\times F_1\boldsymbol{l}^0+\boldsymbol{r}_2\times F_2\boldsymbol{l}^0.$$

但$\boldsymbol{l}^0$是任意的，所以要以上等式成立，必须有

$$(F_1+F_2)\boldsymbol{r}_C=F_1\boldsymbol{r}_1+F_2\boldsymbol{r}_2.$$

由此得到C点的向径表达式

$$\boldsymbol{r}_C=\frac{F_1\boldsymbol{r}_1+F_2\boldsymbol{r}_2}{F_1+F_2}. \tag{1.19}$$

其中F_1和F_2是力$\boldsymbol{F}_1$和$\boldsymbol{F}_2$的大小。

由式(1.19)得出C点的坐标式

$$\begin{cases} x_C=\dfrac{F_1x_1+F_2x_2}{F_1+F_2}, \\ y_C=\dfrac{F_1y_1+F_2y_2}{F_1+F_2}, \\ z_C=\dfrac{F_1z_1+F_2z_2}{F_1+F_2}. \end{cases} \tag{1.20}$$

在一般的情况中，对于由n个力组成的同向平行力系（$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n$）（不一定共面），设其作用点的向径分别为$\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{r}_n$，我们可以反复应用式(1.19)，将力系中的力依次合成。最后得到一个合力$\boldsymbol{F}=\sum\boldsymbol{F}_i$。不论这些力在空间的方向是什么，这个合力总是经过一个中心C点，C点的向径为

$$\boxed{\boldsymbol{r}_C=\frac{\sum F_i\boldsymbol{r}_i}{\sum F_i}.} \tag{1.21}$$

以上的讨论都是就同向的平行力系而言的。其实式(1.21)也适用于求一般的不同向的平行力系的中心，即力系中有些力可以与其余的力指向相反。我们只要取定$\boldsymbol{l}^0$为平行力系的正向单位

向量，则$F_i = F_i \cdot l^0$。这时 F_i 是带有正号或负号的代数量，公式(1.21)仍然可以使用。但是必须注意，要求分母 $\sum F_i \neq 0$。如 $\sum F_i = 0$，则主向量 $R = 0$，于是平行力系不存在合力，当然也无中心可言。

由式(1.21)可得出平行力系中心 C 点的坐标式：

$$x_C = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}, \quad y_C = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}, \quad z_C = \frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i}. \quad (1.22)$$

由平行力系的合成我们引出一个重要的概念，这就是重心。

假如将一个刚体分成许多基本的单元，每一个单元上都受到重力的作用，这许多力组成一个同向平行力系①。这个平行力系的合力总是经过一点 C，不论重力相对于刚体是什么方向（反过来说，不论刚体相对于地面取什么方位）。重力组成的平行力系的中心叫做**刚体的重心**。根据等效力系的概念，整个刚体所受的重力，好象全部都集中在这一点上。

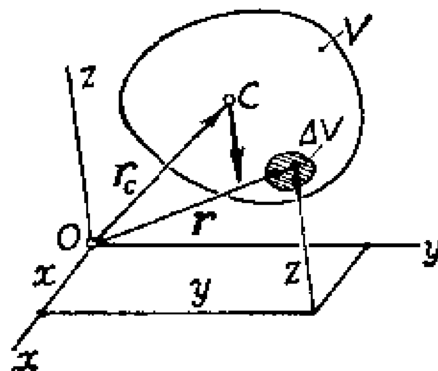


图1.34 重心

物体每个单元（图1.34）所受的重力是 $\rho g \Delta V$，其中 ρ 是物体的密度，g 是重力加速度的值，ΔV 是单元体积。根据式(1.21)，重心 C 的向径应为

$$r_C = \frac{\sum(\rho g \Delta V r)}{\sum(\rho g \Delta V)}.$$

当物体体积不大时，g 可被认为是常量，可以消去。当我们把物体的小单元分割得无限小时，上式中的求和号应该换成对整个物体体积的求积分号，得出

---

① 在刚体的尺寸与地球相比较足够小时，可以认为地面是平面，每个单元的重力竖直向下，大小与相对地面的位置无关。

$$r_C=\frac{\int_V \rho r dV}{\int_V \rho dV}. \tag{1.23}$$

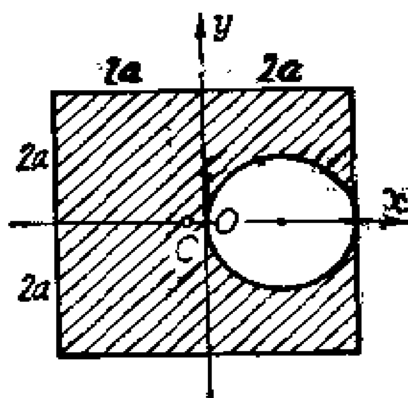
如果物体的密度是均匀的，则 ρ 是常量，可以在式中消去，得到

$$r_C=\frac{\int_V r dV}{\int_V dV}=\frac{\int_V r dV}{V}, \tag{1.24}$$

其中 V 是物体的体积。由此看出，均匀物体重心的位置完全由物体的几何形状所决定。相应的坐标式为

$$x_C=\frac{1}{V}\int_V x dV,\ y_C=\frac{1}{V}\int_V y dV,\ z_C=\frac{1}{V}. \tag{1.25}$$

在实际计算物体重心的位置时并不需要每次都去动用这些公式，往往可以利用物体的对称性及其他一些计算技巧，例如分部法和负质量法等，这要通过一些练习才能学到。



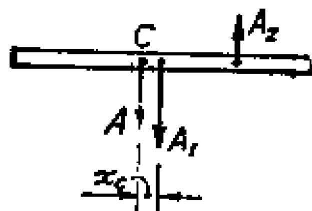


图1.35　负质量法求重心位置

例1.1　每边长 $4a$ 的均匀正方形薄板被挖去一圆，其半径为 a，位置如图1.35所示。求余下部分的重心位置。

解　由对称性可知，重心 C 一定在 x 轴上，即

$$y_C=0.$$

我们只需求 x_C。板是均匀的（厚度、密度都均匀），所以式(1.25)可改写为

$$x_C=\frac{1}{A}\int_A x dA,$$

其中 A 是面积。正方形的面积是 $A_1=16a^2$。我们把圆的面积当作"负"的面积，即

$$A_2=-\pi a^2.$$

于是

$$x_C=\frac{A_1x_1+A_2x_2}{A_1+A_2},$$

其中 x_1 和 x_2 分别是 A_1 和 A_2 的重心坐标。这里 $x_1=0$，$x_2=+a$（注意 x_2 的正负号），故

$$x_C=\frac{16a^2\cdot 0+(-\pi a^2)(+a)}{16a^2+(-\pi a^2)}$$

$$=-\frac{\pi}{16-\pi}a\approx -0.244a. \quad \blacksquare$$

1-6 受力分析与简单的平衡问题

刚体只有在平衡力系的作用下才能够保持静止①，而我们已得到了力系平衡的条件。所以从一般的原理说，上几节的内容包括了刚体静力学的主要部分。但是，在解决具体的问题时，首先要弄清楚哪些力在我们所考虑的力系之内，即弄清楚作用在物体上有哪些力，这叫做**受力分析**。受力分析的第一步就是要确定分析的对象。实际问题中总是有好几个物体相互联系在一起，必须明确哪一个或哪一部分是你分析的对象。其次可以作一个**受力图**（有时称为隔离体图），它包括被分析的**对象**（这个对象也叫做**隔离体**、**自由体**），以及**所有作用于它的力**。力是两个物体之间的相互作用，每画一个力，一定要明确它是哪一个物体作用在分析对象上的力，这样才不致于把"无中生有"的力画在受力图上。常见的力有两种：超距离的力（重力，电磁力）和由接触而引起的力②。在没有电磁力作用时（本课程大多数问题不考虑电磁力），除了重力即地球的引力以外，只要考虑与这个对象相接触的物体对于它的作用力。

---

① 静止只是受平衡力系作用的刚体运动的一种可能情况，一般的运动情况见第九章。在这一章里只考虑静止物体受平衡力系作用的问题，简称平衡问题。

② 这里的接触力是一种宏观的说法。从微观说，接触力是分子或原子之间的短距离作用力，来源于物质结构的电磁力作用。

在受力图画出以后（特别注意不要多画力，也不要漏画力），可以把具体的对象"抽掉"，成为一个"抽象"的力系。如果物体是静止的，那么这应该是一个平衡力系，就可以利用平衡条件求解未知量了。

在作受力分析时，往往要利用作用与反作用的关系：**两个物体之间的作用力与反作用力大小相等，方向相反，且共线**[①]。应该注意，作用力与反作用力总是分别作用在**两个物体**上的。甲对乙的作用力，作用在乙上，它的反作用是乙对甲的作用力，作用在甲上。不要把作用与反作用和作用在同一物体上的两力平衡混为一谈，说什么："作用力与反作用力大小相等、方向相反，所以互相抵消（或说互相平衡）"，这是错误的。

例1.2 重 W 的圆滚筒搁在光滑的斜面上，并用绳拉住其中心（图1.36(a)）。已知 α 和 β，求绳的拉力及圆筒对斜面的压力。

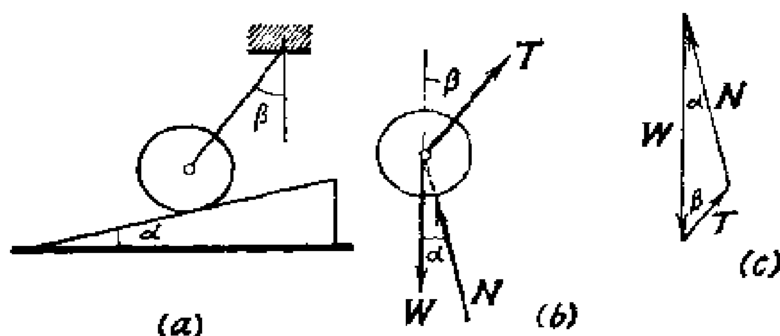


图1.36 平衡的例子

解 圆筒是分析对象，画出它的受力图（图1.36(b)）。它受三个力的作用：绳子对筒的张力 $\boldsymbol{T}$（方向沿绳），斜面对筒的支持力 $\boldsymbol{N}$（方向垂直于斜面），筒自身的重力 W，即地球对筒的引力（方向竖直向下，作用线过筒的重心）。这三个力成为一个平衡力系，应用三力平衡条件，三力应组成封闭的力三角形（图1.36(c)）。

① 作用与反作用的关系，就是牛顿第三定律，我们这里是作为自然规律而加以承认的。

要注意力三角形不是受力图，图(c)中并不表明作用线，只表明力的大小和方向之间的几何关系。根据正弦定律，可以得出：

$$N=\frac{W\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)},\qquad T=\frac{W\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

题目要求的是简对斜面的压力，它是斜面对球的支持力 $\boldsymbol{N}$ 的反作用力，大小与 $\boldsymbol{N}$ 的大小相等，方向垂直于斜面指向下（与 $\boldsymbol{N}$ 相反）。▌

这个简单例子说明，求解平衡问题的步骤大体是：明确对象；受力分析，画受力图；利用平衡条件列方程；数学运算求未知量；将数学运算的结果，回到力学对象上加以说明，作出答案，……等等。在这个例子中，未知力有两个，即 $\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{T}$（力的方向是已知的），利用平衡条件可以把它们解出来。

研究对象（质点、刚体）的空间位置所受到的其他物体的限制称为**约束**。比如上例中的绳子和光滑斜面都给对象以一定的约束。约束物体与被约束物体之间通过接触点相互作用有力，我们把加在被约束物体上的这种作用力叫做**约束力**，有时也叫做**约束反力**或**反力**。

作用在一个物体上的外力，如果它的大小和方向与约束无关，则称为**主动力**。约束力与主动力在性质上有根本的差别。一般地，当主动力不存在（或等于零）时，则相应的约束力也不存在（或等于零），但反过来就不一定。这就是说约束力是依赖于主动力的，它带有被动的性质，但是我们通常并不使用被动力这一名称。例如在例1.2中，重力 $\boldsymbol{W}$ 是主动力，绳子的张力 $\boldsymbol{T}$ 和斜面的支持力 $\boldsymbol{N}$ 是约束力。

约束是通过给予对象一个约束力的方式实现限制的。在处理受约束对象的平衡问题时，我们往往要用到解除约束原理。

解除约束原理　当约束被人为地解除时，即人为地撤去约束物时，必须在接触点上用一个适当的约束力来代替。

其实在例1.2中我们已经使用了这一原理。当我们撤去绳子

时，就用绳子的张力 $\boldsymbol{T}$ 来代替。当我们撤去斜面时，就用斜面对筒的支持力 $\boldsymbol{N}$ 来代替(见图1.36(b))。

常见的约束和约束力的性质如下：

1.绳索 它对物体的反力是一个拉力，其作用线沿绳索。它包含一个未知量（即拉力的大小，一般需要通过平衡条件来求出)。

2.光滑[1]的约束面 物体受一个光滑约束面的约束时(此时应当认为物体表面也是光滑的)，反力作用线通过接触点，并沿着两接触面的共同法线方向。这个力只能是压力，所以指向物体的内部(图1.37)，它有一个未知量，就是力的大小。

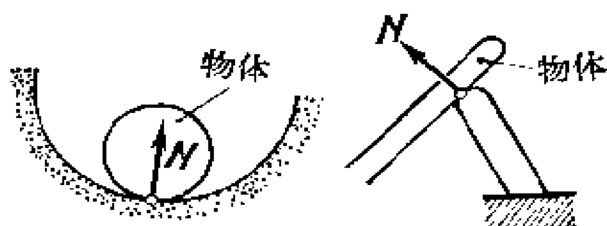


图1.37 光滑面的约束

光滑铰链是使物体上一点保持不动的一种约束。它对物体的反力作用线经过铰链销的中心（就是那个不动点）(图1.38)，反力的大小和方向都是未知量。在平面情况叫做柱铰链，有两个未知量。这两个未知量可取成反力的大小 N 及其与水平线的夹

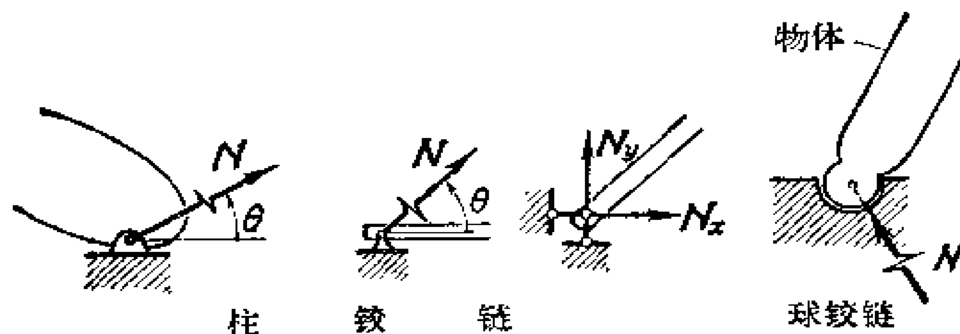


图1.38 铰链约束

[1] 光滑是指没有摩擦，这是在摩擦力比起其他力小得多而可以忽略时的一种理想化模型。

角 θ；或者取成反力在直角坐标系中的两个分量 N_x 和 N_y。在空间情况叫做球铰链，有三个未知量。

3. 连杆 它是一根轻杆（本身重量可以忽略不计），它的一端 A 用铰链和支座或物体相连，另一端 B 用铰链与物体相连（图1.39）。

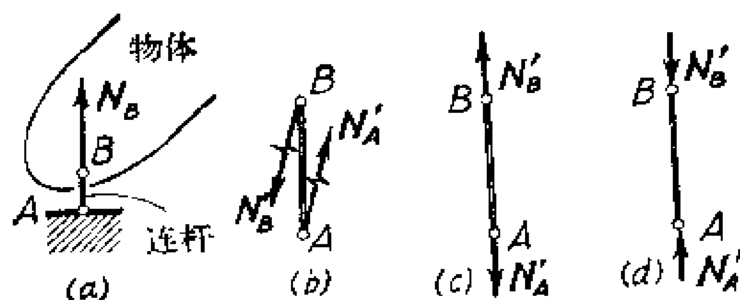


图1.39 连杆及其受力分析

如果两端铰链是光滑的，而且连杆自身重量可以不计，那么它的受力图将如图1.39(b)所示，N'_A 和 N'_B 分别是支座和物体对连杆的力。它们分别经过 B 和 A。连杆共受两力作用，处于平衡状态。由两力平衡条件，必有 $N'_A=-N'_B$。可能出现图1.39(c)这种情况，此时杆受拉力；也可能出现图1.39(d)这种情况，此时杆受压力。我们所要注意的是连杆对物体的反力 N_B，也就是 N'_B 的反作用力，它应该与 N'_B 一样沿连杆 AB 的方向。当 N_B 指向物体内部时表明连杆"推"物体（此时连杆本身受压）。反之，连杆拉物体（此时连杆本身受拉）。到底是"推"还是"拉"，不妨先假设一种情况，再根据平衡条件解出结果。正的结果说明假设是对的，负的则相反。

4. 滚子 滚子的结构示意图如图1.40所示。滚子对物体的反力作用线沿支承面的法线。因此，它等价于垂直于支承面的一根连杆。图中圆筒是示意图，实际的构造可以防止物体和支承面互相脱开，即可以受压，也可以受拉。

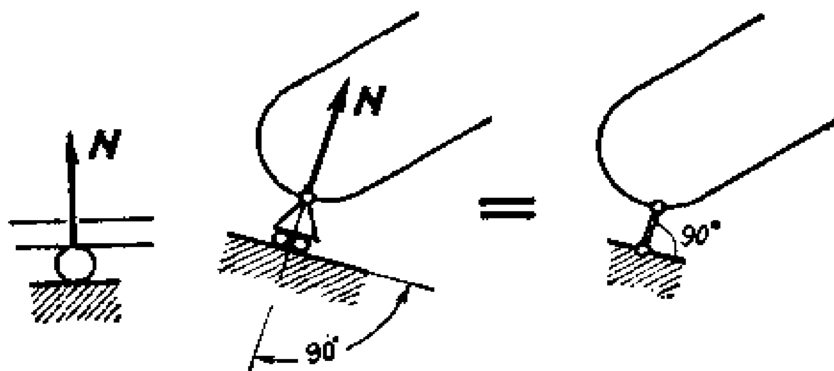


图1.40 滚子约束

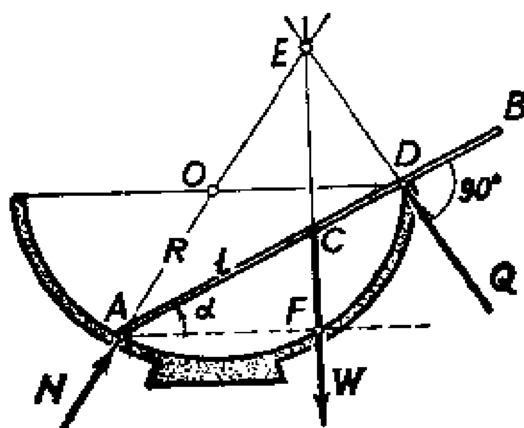


图1.41 平衡时 $\alpha=?$

例1.3 半径为R的半球形碗内搁一均匀的筷子AB（图1.41），筷长$2l$（设$2R>l>\frac{\sqrt{6}}{3}R$），且为光滑接触。求筷子平衡时的倾角α。

解 确定筷子为对象，作受力分析。在A端，碗对它的约束反力$\boldsymbol{N}$垂直于碗面，即沿半径AO；在碗边D处对筷子有一反力$\boldsymbol{Q}$，垂直于AB；在筷子的重心C处（AB的中点）有一重力W，垂直向下。由$\boldsymbol{N}$，$\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{W}$三力组成一个平衡力系。根据三力平衡的条件，三力必须是汇交力系，即W的作用线必须经过$\boldsymbol{N}$和$\boldsymbol{Q}$的交点E。于是由几何关系就可以求出α。

因为$\angle ADE$是直角，所以E一定在圆周上，即$\overline{AE}=2R$。因为$\angle OAD=\angle ODA=\alpha$，所以$l\cos\alpha=\overline{AF}=2R\cos 2\alpha$。由此解得

$$\alpha=\arccos\left[\frac{l}{8R}\pm\sqrt{\left(\frac{l}{8R}\right)^2+\frac{1}{2}}\right].$$

经过一系列数学运算以后，得到了结果。一般说来，还不能说解题任务已经全部完成了，因为我们解的是力学问题，而不是数学问题。还应该把数学的运算结果回到力学问题中加以讨论。

在 α 的表达式中，根号外的正负号应该怎样取？由图1.41可看出，应该取正号（为什么？）。l 这个量不能太大，必须有 $l<2R$（为什么？）；同时 l 又不能太小，因为从图1.41可知，必须有 $\overline{AD}<\overline{AB}$（为什么？），即 $2R\cos\alpha<2l$，将 $\cos\alpha$ 的表达式代入，即得 $\frac{\sqrt{6}}{3}R<l$。合起来必须有条件 $\frac{\sqrt{6}}{3}R<l<2R$。▌

桁架 桁架是工程中常用的一种结构形式（图1.42）。我们把组成桁架的杆，任意取出一根杆 AB 来画受力图。通常我们不

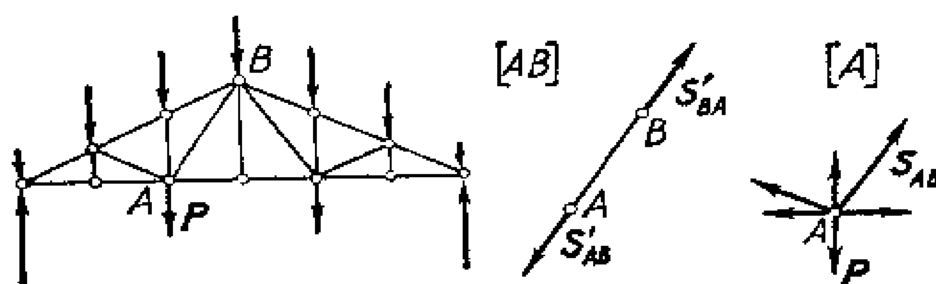


图1.42 桁　架

考虑杆的自重，并且假设 AB 杆是用光滑铰链和其他杆在节点 A 和 B 处连起来，又假设外力（如载荷）只施加在节点上。因此，AB杆只受两个力的作用，即 $\boldsymbol{S}'_{AB}$ 和 $\boldsymbol{S}'_{BA}$。它们的作用线分别经过 A 点和 B 点（由于铰链是光滑的）。如果桁架整体（如桥梁，屋架）处于静止状态，那么 AB 杆所受到的力系应平衡。因此 AB 杆就是以前曾分析过的连杆，即 $\boldsymbol{S}'_{AB}$ 和 $\boldsymbol{S}'_{BA}$ 的作用线都沿 AB 杆，且 $\boldsymbol{S}'_{AB}=-\boldsymbol{S}'_{BA}$。再取一个节点作受力图。它受的力有两类，一是外加的载荷 $\boldsymbol{P}$，这是外力（内外是相对桁架这个整体来说的），另外就是各个杆对节点的力，这是内力。比如 AB 杆对节点 A 的作用力 $\boldsymbol{S}_{AB}$，它与刚才所说的力 $\boldsymbol{S}'_{AB}$ 是作用力和反作用力的关系。所以有 $\boldsymbol{S}_{AB}=-\boldsymbol{S}'_{AB}$。在一个节点处有几根杆与它相连结，就有

几个这样的内力。总结起来说，**桁架的基本性质**是：（1）每一根杆都是连杆，它或者受拉力，或者受压力。（2）每一节点处，有关的桁架"内力"和"外力"组成一个平衡共点力系。这样我们就可以反复利用节点处共点力系的平衡条件，杆的两力平衡条件，以及作用与反作用定律对桁架进行分析计算，求出桁架的全部内力。

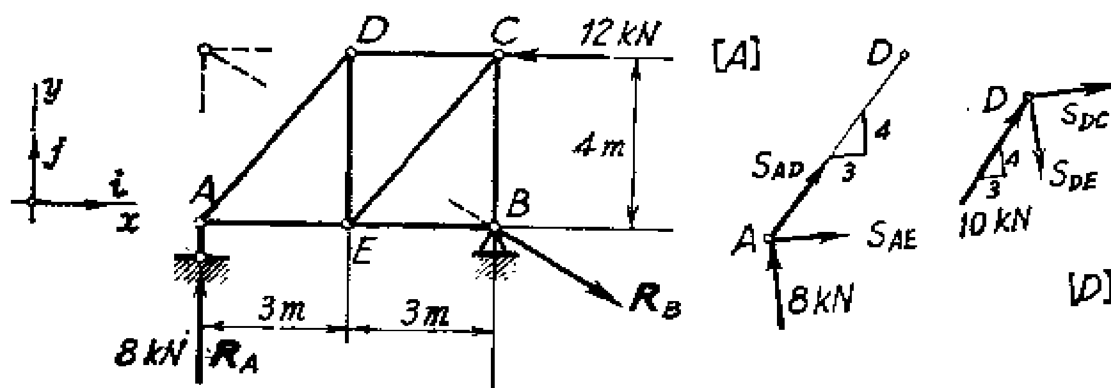


图 1.43 求桁架的内力

例1.4 如图 1.43 所示，桁架由五个节点与七根杆组成的，已知在 C 点作用一水平的外力 $F=12\text{kN}$，杆的长度如图示。求各杆的内力。

解 从整体看，整个桁架放在支座上。A 点处是连杆，支座反力 $\boldsymbol{R}_A$ 垂直向上。B 点处是铰链，支座反力 $\boldsymbol{R}_B$ 的方向和大小都是未知的。但是，根据三力平衡条件，我们可以求得

$$\boldsymbol{R}_A=8\boldsymbol{j}, \qquad \boldsymbol{R}_B=12\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j},$$

其中 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 是取定的直角坐标系的单位向量，如图所示。力的单位都是千牛顿(kN)，下同。

作节点 A 的受力图（图中 [A]），假设内力 $\boldsymbol{S}_{AD}$ 和 $\boldsymbol{S}_{AE}$ 的指向如图所示。利用共点力系的平衡条件 $\sum \boldsymbol{F}=0$ 得

$$\sum F_x=0; \qquad S_{AE}+S_{AD}\cdot\frac{3}{5}=0,$$

$$\sum \boldsymbol{F}_y=0; \qquad S_{AD}\cdot\frac{4}{5}+8=0.$$

由第二式得出 $S_{AD}=-10\text{kN}$，代入第一式求得 $S_{AE}=+6\text{kN}$。S_{AE} 前的正号表明，最初我们对 S_{AE} 所假设的指向是符合实际情况的，因而 AE 杆受到的是拉力。S_{AD} 前的负号表明，AD 杆受到的是压力（为什么？）。

再作节点 D 的受力图（图中[D]）。AD 杆对 D 的力是10kN，它的指向是由 A 指向 D（为什么？），至于未知的内力 S_{DC} 和 S_{DE} 可以先随意假设一个指向，但通常总是假设它是离开节点 D 的，如图所示。最后再根据计算结果的正负号作出判断。正号表明杆受拉，负号表明杆受压。

对节点 D 用平衡条件 $\sum F_x=0$，得 $10\times\frac{3}{5}+S_{DC}=0$，故 $S_{DC}=-6\text{kN}$，即杆 DC 的内力为压力，大小是 6kN。由 $\sum F_y=0$ 得 $S_{DE}=+8\text{kN}$，杆 DE 的内力为拉力，大小是 8kN。用这样的方法继续下去，再取 E 为平衡对象，可解出 EC 的内力为压力，大小为10kN，BE 内力为拉力，大小为12kN。再取 C 点为平衡对象，这时只有一个未知量，即 BC 的内力。所以两个方程中 $\sum F_x=0$变正确 $+6-12+10\times\frac{3}{5}=0$。这个恒等式可以用来作为前面的计算成为与否的一个检查。另外，由 $\sum F_y=0$ 求得 CB 杆的内力为拉力，大小为 8kN。至此，全部内力已求出（图1.44(a)）。最后可以利用 B 点的平衡条件来作检验：

$$\sum F_x=0: \qquad 12-12=0,$$

$$\sum F_y=0: \qquad 8-8=0.$$

要注意的是图 1.44(a)中所画的箭头，是杆对节点的力。节点对杆的力正好与此指向相反。例如 AD 杆上的两个力是企图把 AD 压缩的压力，而从图 1.44(a)上去看常常容易发生错觉。为了使图示清晰起见，一般画成图 1.44(b)的样子，正号表示杆受拉，负号表示杆受压。▌

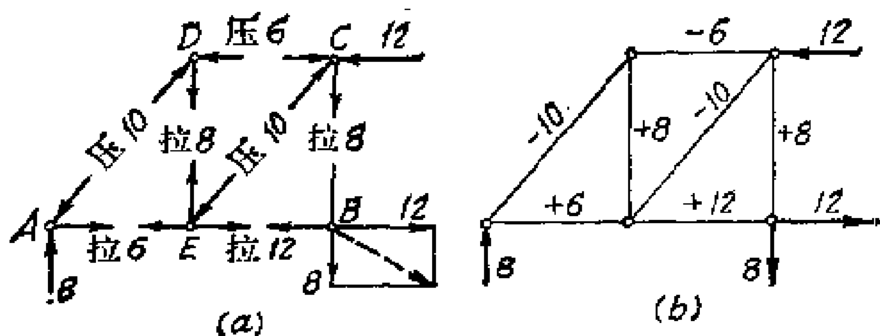


图1.44 各杆内力（单位kN）

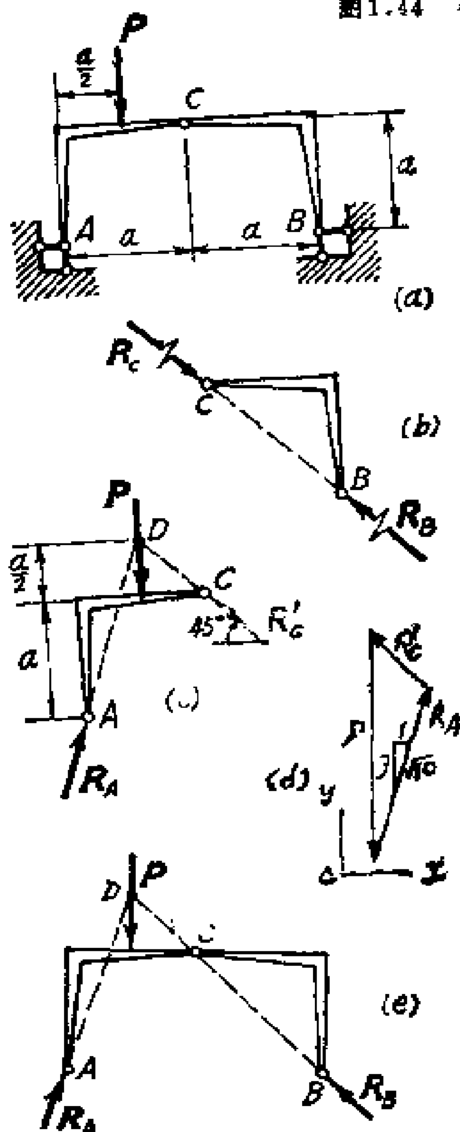


图1.45 三铰拱

例1.5 **三铰拱**是由两个刚体 AC 和 BC 所组成的(图1.45(a))。这两部分由铰链 C 联结起来。每一部分又用铰链和支座相联结。这种结构常用于房屋和桥梁。已知有一竖直外力 $\boldsymbol{P}$ 作用在拱上（可以理解为过桥的车辆对桥的压力），设三铰拱自身重量不计，尺寸如图所示。求 A，B 处的支座反力。

解 先画右半拱 BC 的受力图(图1.45(b))，$\boldsymbol{R}_B$ 是支座 B 的反力，$\boldsymbol{R}_C$ 是刚体 AC 对刚体 BC 的作用力。由两力平衡条件可知，$\boldsymbol{R}_B$ 和 $\boldsymbol{R}_C$ 的作用线必须相同，即沿 BC 连线。再作左半拱 AC 的受力图（图1.45(c)），图中的 $\boldsymbol{R}'_C$ 是 $\boldsymbol{R}_C$ 的反作用力，$\boldsymbol{R}'_C=-\boldsymbol{R}_C$，作用线就是 $\boldsymbol{R}_C$ 的作用线(与水平线夹角为45°)。根据三力平衡条件，$\boldsymbol{R}_A$的作用线

必须经过 R'_C 和 P的交点D。由几何关系就可以确定 R_A 与水平线的夹角是 arc tg(1/3)。由主向量为零：

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{P}+\boldsymbol{R}_A+\boldsymbol{R}'_C=0$$

得

$$R_x=\sum F_x=0, \qquad \frac{1}{\sqrt{10}}R_A-\frac{1}{\sqrt{2}}R'_C=0,$$

$$R_y=\sum F_y=0, \qquad \frac{3}{\sqrt{10}}R_A+\frac{1}{\sqrt{2}}R'_C-P=0。$$

由此解出 $R'_C=\frac{\sqrt{2}}{4}P$，$R_A=\frac{\sqrt{10}}{4}P$。另外，由于 $R_B=R_C=R'_C$，所以 $R_B=\frac{\sqrt{2}}{4}P$。至此 $\boldsymbol{R}_A$，$\boldsymbol{R}_B$ 的大小和方向就全部确定了。

我们现在换一种办法解这个题。前几步还是和上面说的一样，直至分析出 $\boldsymbol{R}_B$ 与水平面夹角为 45° 为止。随后我们不去研究左半拱，而是把整个三铰拱作为分析对象，画出其受力图（图1.45(e)）。然后根据三力平衡的条件 $\boldsymbol{R}_A+\boldsymbol{R}_B+\boldsymbol{P}=0$ 进行计算，最后当然也能得出与前面一种方法同样的计算结果。∎

在这个例子中，可以注意到，用后一种方法时图1.45(e)中沒有涉及 $\boldsymbol{R}_C$，因为我们把整个三铰拱当作一个刚体看待，那么 $\boldsymbol{R}_C$ 就成了刚体自身这一部分对另一部分作用的內力。我们研究的是刚体在外力作用下的平衡问题，当然內力就不必出现了。

问题是：三铰拱明明是由两个刚体组成，从整体看是一个可变形体，为什么可以当作一个刚体来处理？**刚化原理**回答了这个问题。刚化原理是：**已知非刚体（可变形体）在力系作用下处于平衡，如果把这物体刚化（想象它变成或换成刚体），则平衡不受影响。**刚化原理是人们在常识范围里很容易接受的。比如，有一根弹簧两头受拉力，它就要变形，最后在拉伸到适当长度以后就达到了平衡(弹簧不再变形，从整体看处于静止)。此时我们把弹簧"刚化"一下，也就是想象这根弹簧被一根形状相同的完全不会变形的"弹簧"（刚体）代替，当然不会使平衡状态遭到破坏。

但是这种做法反过来却不对了，如果有一根不能变形的刚杆，两端受拉力处于平衡。此时我们把刚杆“软化”一下，也就是想象这根刚杆被一根橡皮杆代替。那么，显然平衡马上就被破坏了。因此，一般说来，刚体的平衡条件是非刚体（可变形体）平衡的必要条件，但不是充分条件，解决变形体的平衡还需要考虑变形条件。有了这个刚化原理，使得刚体静力学中关于平衡的一些结果，在以后的材料力学、弹性力学中解决可变形体的平衡问题时仍然有用。不仅如此，在本课程中也可如上面三铰拱问题那样，把处于平衡中的几个刚体组合的系统加以“刚化”，即当作一个刚体处理。

* * *　对称三铰拱受到对称的两个外力的作用（图1.46）。求支座反力 $\boldsymbol{R}_A$ 和 $\boldsymbol{R}_B$。（提示：利用对称性。）* * *

* * *　三铰拱受到水平推力 $\boldsymbol{P}$ 的作用（图1.47）。将 $\boldsymbol{P}$ 的作用点沿着其作用线由 M 传到 M' 处，A,B 两铰链处的反力会不会受到影响？说明理由。* * *

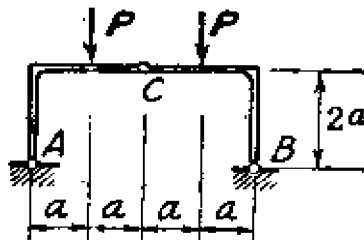


图1.46　对称性的利用

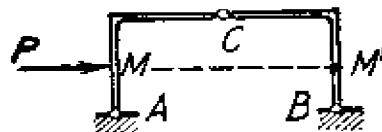


图1.47　力可传吗？

例1.6　一重物 W 用三绳索 OA,OB,OC 挂起，A，B，C 三点不在同一竖直平面内，见图1.48。假设三角形 ABC（不一定是水平的）的中心 G（三中线的交点）正好在过 O 点的竖直线上，$\overline{OG}=h,\overline{OA}=a,\overline{OB}=b,\overline{OC}=c$。求三绳内的张力。

解　设 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 代表。取 $\boldsymbol{k}$ 为竖直向上的单位向量。O 点共受四个力 $\boldsymbol{T}_a,\boldsymbol{T}_b,\boldsymbol{T}_c$ 和 $\boldsymbol{W}$ 的作用，$\boldsymbol{T}_a$ 方向的单位向量是 $\boldsymbol{a}/a$，故 $\boldsymbol{T}a$ 可以写成 $\boldsymbol{T}_a=T_a\boldsymbol{a}/a$。同理有

$\boldsymbol{T}_b = T_b \boldsymbol{b}/b$， $\boldsymbol{T}_c = T_c \boldsymbol{c}/c$；

此外 $\boldsymbol{W} = -W\boldsymbol{k}$。

从几何关系可以得到

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} = h\boldsymbol{k} + \overrightarrow{GA}.$$

同理有

$$\boldsymbol{b} = h\boldsymbol{k} + \overrightarrow{GB},$$
$$\boldsymbol{c} = h\boldsymbol{k} + \overrightarrow{GC}.$$

平衡条件为，$\sum \boldsymbol{F} = 0$， 即

$$\boldsymbol{T}_a + \boldsymbol{T}_b + \boldsymbol{T}_c + \boldsymbol{W} = 0.$$

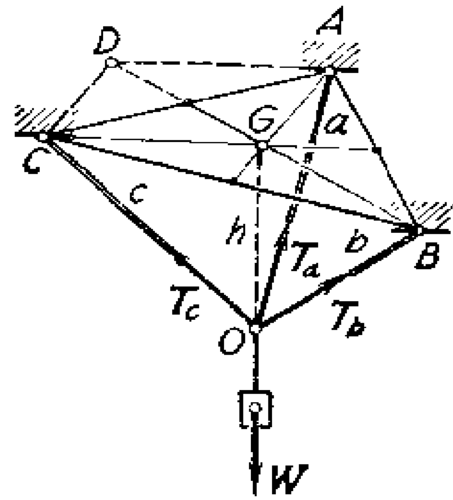


图1.48 求三绳中的张力

将上面各式代入可得

$$\left(-\frac{W}{h} + \frac{T_a}{a} + \frac{T_b}{b} + \frac{T_c}{c}\right) h\boldsymbol{k} + \frac{T_a}{a}\overrightarrow{GA} + \frac{T_b}{b}\overrightarrow{GB} + \frac{T_c}{c}\overrightarrow{GC} = 0.$$

后三项的向量和如果不为零，则它一定在平面 ABC 之内，故不与 $\boldsymbol{k}$ 平行，这是不可能的。因而要使上式满足必须同时满足以下两式：

$$-\frac{W}{h} + \frac{T_a}{a} + \frac{T_b}{b} + \frac{T_c}{c} = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{T_a}{a}\overrightarrow{GA} + \frac{T_b}{b}\overrightarrow{GB} + \frac{T_c}{c}\overrightarrow{GC} = 0. \qquad (2)$$

用几何关系（利用平行四边形 $AGCD$）容易证明

$$\overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{GD} = -(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC}).$$

以此式代入式(2)得

$$\left(\frac{T_a}{a} - \frac{T_b}{b}\right)\overrightarrow{GA} + \left(\frac{T_c}{c} - \frac{T_b}{b}\right)\overrightarrow{GC} = 0.$$

但 $\overrightarrow{GA}$ 与 $\overrightarrow{GC}$ 在平面上是两个不平行的非零向量，上式意味着有

$$\frac{T_a}{a}=\frac{T_b}{b}, \qquad \frac{T_c}{c}=\frac{T_b}{b}.$$

再代入(1)式得

$$\frac{T_a}{a}=\frac{T_b}{b}=\frac{T_c}{c}=\frac{W}{3h}.$$

于是得出所求结果：

$$T_a=\frac{Wa}{3h}, \quad T_b=\frac{Wb}{3h}, \qquad T_b=\frac{Wc}{3h}. \quad \blacksquare$$

大多数空间共点力系的平衡问题，我们总可以这样求解：在空间取一个直角坐标系，然后应用平衡条件 $\sum F=0$ 得到三个平衡方程：$\sum F_x=0$，$\sum F_y=0$，$\sum F_z=0$。总共可以解得三个未知量。但是，有时应用坐标方法计算起来比较繁，这就要适当利用其他巧妙的手法。上题就是一例，充分利用向量的运算，直接得出所求的结果。

*** 设上例中 ABC 位于同一水平面中，验证三绳内张力的竖直投影各为 W 的三分之一。***

1-7 平面力系的平衡

所谓**平面力系**是指力系中各个力的作用线都位于同一个平面中。对这种力系的平衡条件讨论清楚了，就可以很容易地推广到一般的空间力系。平面力系在实际应用中也是很重要的。在许多工程技术问题中，各个力的作用线本来就是在同一平面之中，这当然是平面力系。在另一些问题中，作用于物体上的是一个空间力系，但它对称于某一个平面，于是可以简化为一个平面力系。如将力系中对称的一对力 f 和 f' 合起来(图1.49)，它们的合力 F 就在对称面中，其大小等于 f 在平面

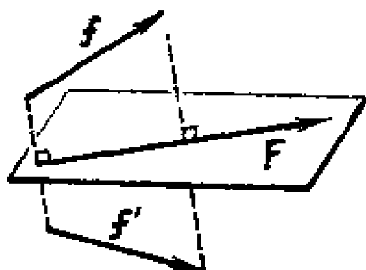


图1.49 f 与 f' 合成为 F

上的投影的两倍(仍是向量)。例如，飞机在定常航行中，空气对飞机的作用力和重力都对称于飞机的几何对称面(图1.50)。所以可以认为飞机受到平面力系的作用。

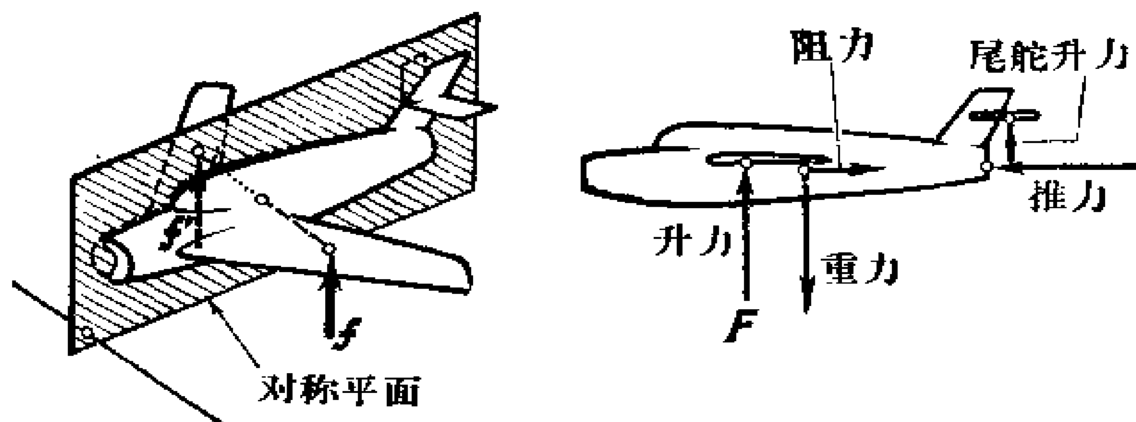


图1.50 作用在飞机上的力系化成平面力系

在§1.5中已经说过，一般力系的平衡条件是主向量 $\boldsymbol{R}=0$ 和主矩 $\boldsymbol{L}=0$。现在对平面力系写出它的具体形式。取直角坐标系 $[O,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$，使得 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 就在力系所在的平面内。于是力系中每一个力在 $\boldsymbol{k}$ 方向上的分量都是零，每一个力对 O 点的力矩都是沿着 $\boldsymbol{k}$ 方向。因此平衡条件就成为：

$$\boldsymbol{R}=(\sum F_x)\boldsymbol{i}+(\sum F_y)\boldsymbol{j}=0,$$

$$\boldsymbol{L}=(\sum m_z)\boldsymbol{k}=0。$$

或者写成三个数量方程：

$$\boxed{\sum F_x=0,\quad \sum F_y=0,\quad \sum m_z=0。} \tag{1.26}$$

这是平面力系平衡条件的**基本形式**，它包含两个投影式和一个力矩式。

例1.7 起重架的机构如图1.51(a)。已知 $OB=BA=l/2$，绳索的 ED 部分平行于杆 OA，OA 与水平线夹角为θ，所挂重物

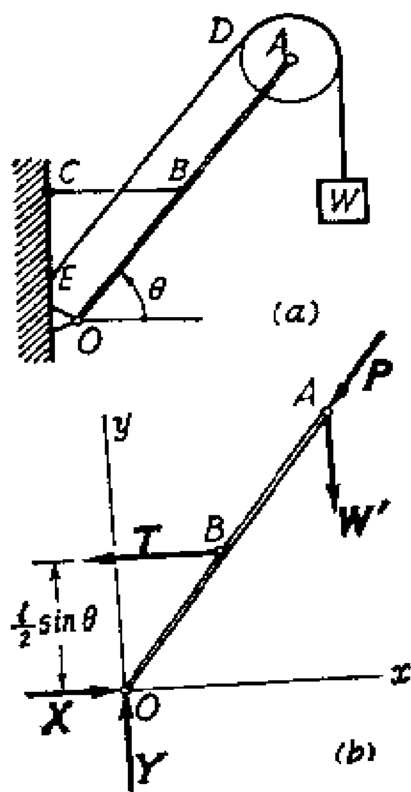


图1.51　起重架

的重力为$\boldsymbol{W}$。不计摩擦，不计OA杆的自重。求水平绳BC中的拉力和铰链O处的反力。

解　作杆OA的受力图（图1.51(b)）。铰链O的反力用水平分力$\boldsymbol{X}$和竖直分力$\boldsymbol{Y}$表示，滑轮对杆的作用力可用两个分力$\boldsymbol{W}'$和$\boldsymbol{P}$表示，且$\boldsymbol{W}'=\boldsymbol{W}$，$P=W$（可以利用滑轮的平衡条件求得）。

取Oxy坐标如图，z轴垂直于纸面指向外，可以不标明。因此，$m_z=\sum m_{Oi}$，m_{Oi}是力系中各个力对O点的矩，逆时针方向为正，反之取负号。

于是平衡方程为

$$\sum F_x=0,\quad X-P\cos\theta-T=0,$$

$$\sum F_y=0,\quad Y-W-P\sin\theta=0,$$

$$\sum m_z=0,\quad -Wl\cos\theta+P\times 0+T\frac{l}{2}\sin\theta+X\times 0+Y\times 0=0.$$

由这三个方程可解出三个未知量：

$$T=2W\operatorname{ctg}\theta,$$

$$X=W(\cos\theta+2\operatorname{ctg}\theta),$$

$$Y=W(1+\sin\theta).$$ ▌

对于平面力系，平衡方程(1.26)是一种基本形式，可以用它求解许多问题。但是在具体的问题中，我们可以应用与式(1.26)等价的其他形式。从而使计算更简便一些。下面就分别讨论平衡方程的几种不同的等价形式。

在平面上选取坐标时，不一定选取正交坐标系，比如我们可以取一坐标系$[O,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$，单位向量$\boldsymbol{e}_1$和$\boldsymbol{e}_2$在所考虑的平面

上，但互相不垂直，而 $\boldsymbol{e}_3$ 与平面垂直。根据§1.2结尾处的结论，平衡条件 $\boldsymbol{R}=0$ 写成分量形式为

$$\begin{cases} R_1^e=\sum F_{i1}^e=0, \\ R_2^e=\sum F_{i2}^e=0. \end{cases} \tag{1.27}$$

或者写成投影形式为

$$\begin{cases} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{e}_1=\sum\boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{e}_1=0, \\ \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{e}_2=\sum\boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{e}_2=0, \end{cases} \tag{1.28}$$

其中 R_1^e, F_{i1}^e 表示主向量 $\boldsymbol{R}$ 和力 $\boldsymbol{F}_i$ 在 $\boldsymbol{e}_1$ 方向的分量，$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{F}_i\cdot\boldsymbol{e}_1$ 表示 $\boldsymbol{R}$ 与 $\boldsymbol{F}_i$ 在 $\boldsymbol{e}_1$ 上的投影。

条件 $\boldsymbol{L}=0$ 仍可以写成

$$L_3^e=\sum\boldsymbol{m}_{Oi}\cdot\boldsymbol{e}_3=\sum\boldsymbol{m}_{Oi}=0, \tag{1.29}$$

其中 $\boldsymbol{m}_{Oi}$ 是力 $\boldsymbol{F}_i$ 对 O 点的矩，它总是在 $\boldsymbol{e}_3$ 的方向。所以它在 $\boldsymbol{e}_3$ 上的投影就是它的大小(带正负号)，即 $\boldsymbol{m}_{Oi}\cdot\boldsymbol{e}_3=m_{Oi}$。

将(1.27)与(1.29)联立得出平衡方程的一种形式；将(1.28)与(1.29)联立得出平衡方程的又一种形式。

平衡方程的另外一种形式（三力矩式）是：在平面上任选不共线的三个点 A,B,C，平衡方程为

$$\boxed{\sum m_A=0,\quad \sum m_B=0,\quad \sum m_C=0,} \tag{1.30}$$

其中 m_A, m_B, m_C 分别是力 $\boldsymbol{F}_i$ 对 A,B,C 三点的力矩的大小(带正负号，不妨约定逆时针方向取正号)。这就是说，式(1.30)是力系平衡，即 $\boldsymbol{R}=0$，$\boldsymbol{L}=0$ 的必要且充分条件。

条件的必要性是很容易证明的，因为如果一个力系满足 $\boldsymbol{R}=0, \boldsymbol{L}=0$，即与零等效，那么这力系对任意点的矩应该为零。

需要详细证明的是条件的充分性。设式(1.30)被满足，怎么能推断出 $\boldsymbol{R}=0$，且 $\boldsymbol{L}=0$ 呢？

因为 $\sum m_A=0$，这说明如果我们取 A 点为化简中心，则力系简化成作用线过 A 点的一个合力，将此合力记作 $\boldsymbol{R}^*$。用反证法。

我们假定 $\boldsymbol{R}^*$ 不为零(如果 $\boldsymbol{R}^*$ 是零，就无需证明了)。力系对 B 点的主矩等于合力 $\boldsymbol{R}^*$ 对 B 点的矩，即 $\boldsymbol{L}_B=\overrightarrow{AB}\times\boldsymbol{R}^*$。根据式(1.30)，$\boldsymbol{L}_B=0$，则 $\boldsymbol{R}^*$ 必与 BA 共线，即 $\boldsymbol{R}^*$ 的作用线一定要经过 B 点。同理，我们根据(1.30)中的 $\sum m_C=0$ 又可以断定 $\boldsymbol{R}^*$ 的作用线一定要经过 C 点。$\boldsymbol{R}^*$ 的作用线既要沿 AB，又要沿 AC，但是 A,B,C 又不在一条直线上，这是不可能的。因此，与假设 $\boldsymbol{R}^*\neq0$ 矛盾。故 $\boldsymbol{R}$ 必为零向量。

平衡方程还有一种形式(两力矩式)是：在平面上任意取两点 A 和 B，再任取一个单位向量 $\boldsymbol{l}^0$，要求 $\boldsymbol{l}^0$ 与 AB 的连线**不垂直**，则平衡方程为：

$$\sum F_l=0,\quad \sum m_A=0,\quad \sum m_B=0, \tag{1.31}$$

其中 F_l 是力 $\boldsymbol{F}_i$ 在 $\boldsymbol{l}^0$ 上的投影。式(1.31)是力系平衡的必要且充分条件，其证明读者可以仿照三力矩式的证明作出。

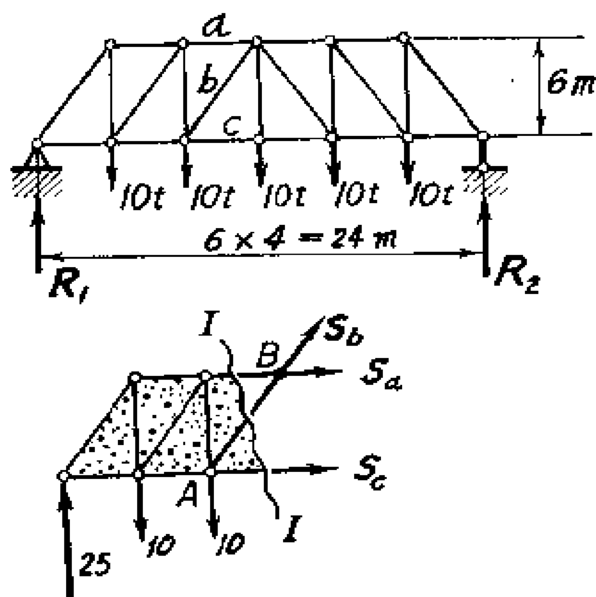


图1.52 桁架的截面法

平衡方程的几种形式都是等价的，在解具体问题时，要根据具体情况加以灵活选用。

例1.8 桁架如图1.52所示。尺寸和受力情况如图示，t 代表吨。求 a,b,c 三杆中的内力 S_a，S_b，和 S_c。

解 先把桁架作为一个整体，应用平衡方程(1.26)算出两个支座处的反力。我们可以灵活地应用对称性，立

刻看出这两个反力是 $R_1=R_2=\frac{1}{2}\times50=25$ (t)，方向向上。

在桁架上取一个假想的截面 I—I，把桁架分成两部分，并取左半边作为分析对象。这左半边包括 a,b,c 三杆的一部分，每一杆的另一部分对于这个受力对象的作用力就成了外力，它们分别沿着杆的方向，设分别是 S_a,S_b,S_c，并且都是拉力（如果计算结果是负号，则应是压力）。

应用两力矩形式的平衡方程(1.31)，取 A,B 点如图所示，l^0 竖直向上，则有

$$\sum F_l=0,\quad 25-10-10+3S_b/\sqrt{13}=0,$$
$$\sum m_A=0,\quad 10\times4-25\times8-6S_a=0,$$
$$\sum m_B=0,\quad 10\times4+10\times8-25\times12+6S_c=0.$$

从以上方程解出

$S_a=-26.67$ t（压力），$S_b=-\frac{5}{3}\sqrt{13}=-6.01$ t（压力），

$S_c=+30.00$ t（拉力）。

作为验核，可取任一个投影式或力矩式（它与以上三个方程总是线性相关的），例如取 $\sum F_x=0$（x 方向为水平向右），将以上计算结果代入加以验核：

$$0+0+0+(-26.67)+(30.00)+(-6.01)\times\frac{2}{\sqrt{13}}$$
$$=-26.67+30.00-3.33=0.00.\ \blacksquare$$

例1.9 长 $2l$ 的水平梁用三根竖直连杆悬起（图1.53），载荷 W 挂在 D 点，a 及 l 为已知量，求连杆的反力 R_1，R_2 和 R_3。

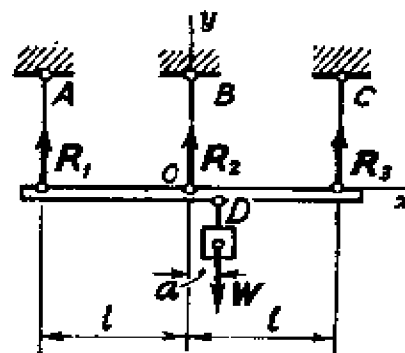


图1.53 求 R_1,R_2 和 R_3

解 取 x 和 y 轴如图。用一力矩式的平衡方程：

$$\sum F_x=0,\quad 0=0,$$
$$\sum F_y=0,\quad R_1+R_2+R_3=W,$$
$$\sum m_A=0,\quad lR_2+2lR_3=W(l+a).$$

三个未知量，只有两个方程，不能解出。

换用两力矩式的平衡方程：

$$\sum F_y=0,\quad R_1+R_2+R_3=W,$$
$$\sum m_A=0,\quad lR_2+2lR_3=W(l+a),$$
$$\sum m_C=0,\quad -2lR_1-lR_2=-W(l-a).$$

虽然在形式上有三个方程，但只有两个是独立的，因为第二式减去第三式就得出第一式，因此也不能解出三个未知数。

再改用三力矩式(已注意到 A,C,D 三点不共线)：

$$\sum m_A=0,\quad lR_2+2lR_3=W(l+a),$$
$$\sum m_C=0,\quad -2lR_1-lR_2=-W(l-a),$$
$$\sum m_D=0,\quad -(l+a)R_1-aR_2+(l-a)R_3=0.$$

可以验证这三个方程也是线性相关的，因此也不能从其中解出三个未知数。

因此这个题无解。▌

为什么这样简单的问题，竟然得出无解的结论呢？是因为三根杆中的内力可大可小任意取值吗？还是杆中不存在内力？显然都不是，因为在实际问题中，客观上这三根杆中的内力应该是完全确定的，那么我们只能去怀疑我们在运用理论时还有什么因素沒有考虑到，以至连这样简单的问题都束手无策。

我们把例1.9改成下面的例1.10。

例1.10 长 $2l$ 的刚性梁（不计自重）用三根竖直的弹簧悬起(图1.54)。载荷 W 挂在 D 点，a 及 l 为已知量。设三根弹簧的弹性系数均为 k，且在 W 加上以前都沒有伸长量，并设在 W 加上以后三根弹簧仍然是竖直的。求 R_1，R_2 和 R_3。

解 取定 x,y 轴如图所示，用一力矩平衡方程得两个独立方程：

$$\sum F_y=0,\quad R_1+R_2+R_3=W, \qquad (1)$$
$$\sum m_A=0,\quad lR_2+2lR_3=W(l+a). \qquad (2)$$

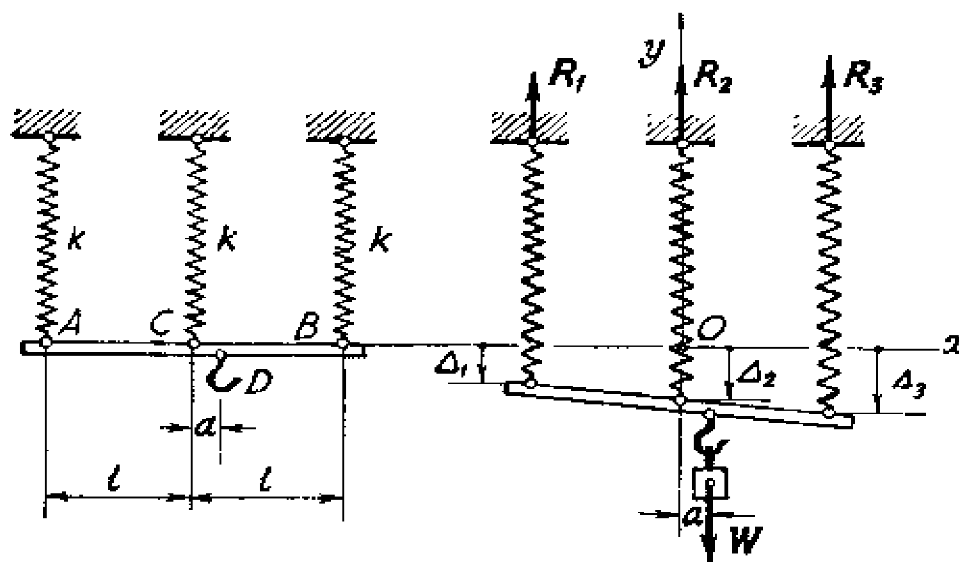


图1.54　求 R_1, R_2 和 R_3

因为三根弹簧受力后的伸长量为 $\Delta_1=R_1/k$，$\Delta_2=R_2/k$，$\Delta_3=R_3/k$。梁是刚性的，三根弹簧在变形后下端仍在一直线上，因而可以得到一个变形的协调条件

$$\Delta_2=\frac{\Delta_1+\Delta_3}{2}.$$

将 Δ_1，Δ_2 及 Δ_3 的值代入就可以得到

$$2R_2=R_1+R_3. \tag{3}$$

由联立方程(1)，(2)与(3)可以解出

$$R_1=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{l}\right)W,\qquad R_2=\frac{1}{3}W,$$

$$R_3=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{l}\right)W. \quad \blacksquare$$

将例1.9和例1.10进行比较，立即就会明白，差别就在是否考虑悬挂弹簧（其实连杆也一样）的变形。理论力学中的静力学假定物体是刚体，在这个前提下，有一部分问题就不能应用刚体静力学的理论和方法给出答案，必须补充上变形的协调条件。变形物体的平衡问题将在材料力学和弹性力学等课程中讨论。

在平面力系情况下，刚体静力学理论推导出平衡方程的独立方程数是三，而对于平面平行力系（例1.9就是这种情况），独立的平衡方程数减少为两个，平面共点力系独立的平衡方程数也是两个。凡是未知数个数与独立平衡方程数一致的问题叫做**静定问题**(能由刚体静力学决定的意思)，我们可以求解。凡是未知数个数大于独立方程个数的问题叫做**超静定问题**①，仅用刚体静力学方程不能求解，本课程中一般不讲这类问题。因此在具体计算问题以前，最好先分析一下未知量的个数和独立平衡方程的个数，免得遇到超静定问题劳而无功。

例1.11 三铰拱的尺寸与载荷已知，如图1.55所示。求支座 A,B 处的反力。

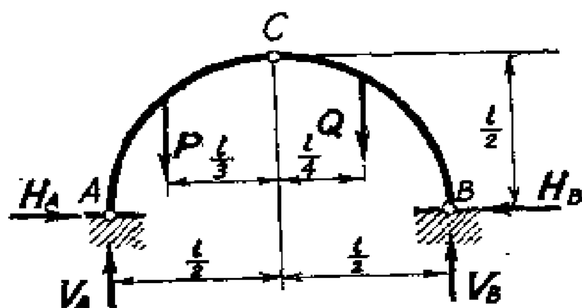


图1.55 三铰拱

解 这里有两个刚体，AC 和 CB。每一个刚体受到一个平面力系的作用，即对每一个刚体可列出三个独立的平衡方程，一共有六个独立的方程。这题中反力的未知量有六个：A,B,C 处每处各两个。六个方程，六个未知量，问题是静定的，可求解。

在具体求解时，则不必拘泥于一定是用哪六个方程，而可以灵活处理。

取整体为平衡对象，可列出三个方程，并不能解出全部未知量 H_A, V_A, H_B, V_B，但可求得：

$$V_A=\frac{5}{6}P+\frac{1}{4}Q,\quad V_B=\frac{1}{6}P+\frac{3}{4}Q \quad 和 \quad H_A=H_B.$$

---

① 有时也称“静不定”问题，我们不采用这个词，因为一个静定的结构就是自由度数等于零的结构，而一个超静定的结构其实是自由度数为“负数”的结构。而静不定这个词意好象是结构“不定”或者“有自由度”似的，可能造成误解。

所以 H_A 和 H_B 仍然是未知量。

再取 AC 为平衡对象，可以列出三个平衡方程，此时只有三个未知量，即 H_A 和 C 处的两个未知量，可求解。对 C 点取矩得

$$H_A = \frac{1}{6}P + \frac{1}{4}Q.$$

还可以求得 CB 部分对 AC 部分（作用点在 C 点）的水平力大小为 $\frac{1}{6}P + \frac{1}{4}Q$，竖直力大小为 $\frac{1}{6}P - \frac{1}{4}Q$。▌

1-8 空间力系的平衡

空间力系的平衡条件仍然是主向量 $\boldsymbol{R}=0$ 和主矩 $\boldsymbol{L}=0$，当采用直角坐标系以后，可以写成六个独立的平衡方程：

$$\begin{array}{|lll|}\sum F_x=0, & \sum F_y=0, & \sum F_z=0, \\ \sum m_x=0, & \sum m_y=0, & \sum m_z=0.\end{array} \qquad (1.32)$$

和上节讨论平面力系的情况一样，对于特殊的空间力系，独立方程的个数要减少。读者可以自己去推演以下的独立方程个数和形式。

空间力偶系有三个平衡方程：

$$\sum m_x=0, \quad \sum m_y=0, \quad \sum m_z=0,$$

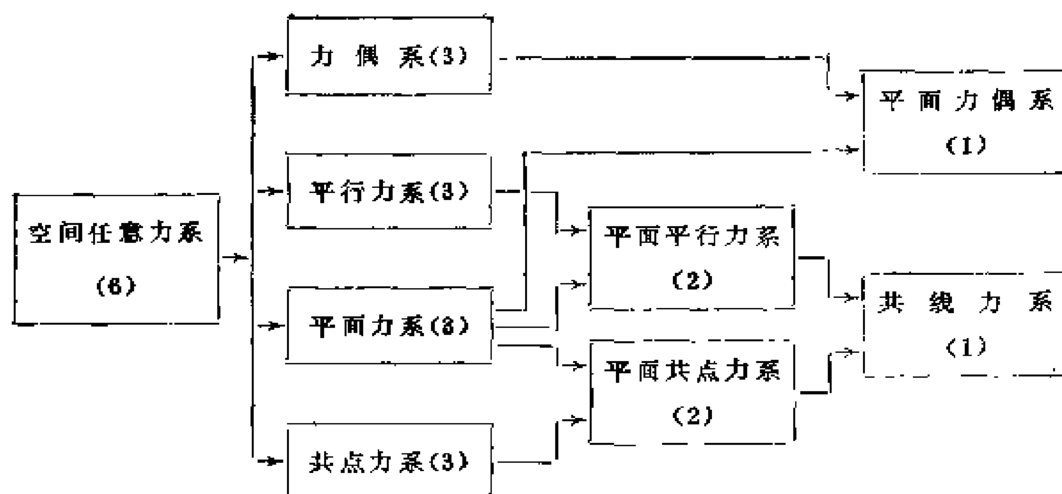
空间共点力系有三个平衡方程：

$$\sum F_x=0, \quad \sum F_y=0, \quad \sum F_z=0.$$

平行于某一根轴，比如是 z 轴的力系有三个平衡方程：

$$\sum F_z=0, \quad \sum m_x=0, \quad \sum m_y=0.$$

其实平面力系也是空间力系的一种特殊情况，从这个意义上看，各种力系都可以统一在一般空间力系之中，它们之间的关系和独立的平衡方程个数可归纳如下：



例1.12 有一空间结构如图1.56所示。A, B, C 三处用六根连杆支承，使结构具有刚性。六根连杆中任意两根不能共线，且不能存在这样的轴线，它与六根连杆都共面。设结构的尺寸都已知。问求解内力是静定问题还是超静定问题？

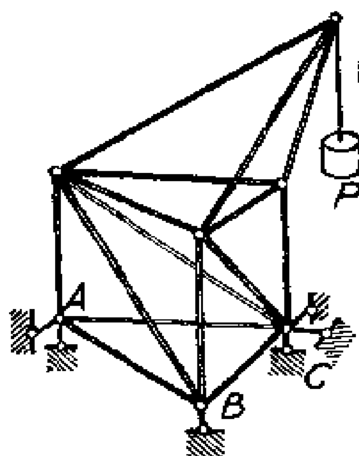


图1.56 空间结构

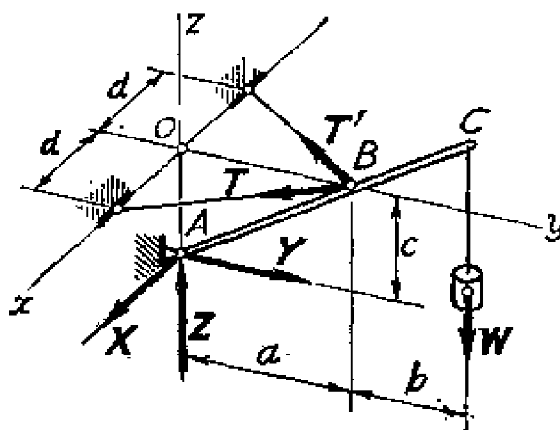


图1.57 求反力和绳子的张力

解 结构的节点数 $n=7$，每个节点都是一个空间共点力系，可列三个方程，所以总共有 $3n=21$ 个独立方程。结构共有15根杆，每根杆的内力是一个未知数，共计 $f=15$ 个未知数。另外支座连杆对结构的反力是未知数，共计6个。方程数与未知数个数相

同。因此，这是静定问题①。确定是静定问题以后，就可以采用各种灵活的办法去求解内力，与上节讨论的平面桁架情况类似。

由上可见，一般说来，静定空间桁架的杆数 j（不计支承连杆）和节点数 n 的关系是 $j=3n-6$。 ▎

例1.13 有一空间结构如图1.57所示。设杆的自重不计，$\boldsymbol{W}$ 已知。求：铰链 A 处的反力分量 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}$ 和绳子的张力 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{T}'$。

解 以 AC 杆为对象，平衡力系中有六个力：$\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{Z}$，$\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{T}'$ 和 $\boldsymbol{W}$。

由 $\sum m_y=0$，即 $-X\cdot c=0$，解出 $X=0$；

由 $\sum m_x=0$，即 $+Y\cdot c-W(a+b)=0$，解出 $Y=W(a+b)/c$；

由 $\sum m_z=0$，即 $-T\dfrac{ad}{\sqrt{a^2+d^2}}+T'\dfrac{ad}{\sqrt{a^2+d^2}}=0$，解得 $T=\boldsymbol{T}'$；

由 $\sum F_y=0$，即 $Y-\boldsymbol{T}\dfrac{a}{\sqrt{a^2+d^2}}-T'\dfrac{a}{\sqrt{a^2+d^2}}=0$，解出

$$T=T'=[W(a+b)\sqrt{a^2+d^2}]/2ca;$$

再由 $\sum F_z=0$，即 $Z=W$。

至此五个未知量全部解完。通过这例可以看出，如果将坐标系选得合适，计算力矩的点选取合适，计算工作可以大大简化。

在以上计算中，沒有用到平衡方程 $\sum F_x=0$，这个方程和 $\sum m_z=0$，$\sum F_y=0$ 是线性相关的。这是因为，在这题中空间六个力的作用线比较特殊，它们都和 AC 线相交。因此，如果列出力矩方程 $\sum m_{AC}=0$，它成为恒等式 $0=0$，损失掉一个独立方程。所以这个题在刚体静力学范围里只能解五个未知数。 ▎

例1.14 一重量 W 置于有四条腿的正方形桌面上的一点。求每条腿中的压力。

解 桌面受五个平行力的作用，其中四个是未知的，但空间平行力系的平衡条件只有三个独立方程，因此这是超静定问题，

---

① 独立的方程数与未知数个数相同，这只是静定结构的必要条件，其充分条件可参阅有关结构力学的教科书。

必须补充桌腿的变形条件才能求解。我们假设桌面是刚性不变形的，它在桌腿变形以后，仍保持为一个平面。再假设在不加重量W时，四条腿都沒有变形，刚好着地，而且桌腿的缩短量与受到的压力成正比，比值是λ，四条腿都一样。这样，问题就可以求解了。

取变形前的桌面为Oxy平面，O点在其中心，x和y轴平行桌边，z轴向上(图1.58)。设四条腿的反力及它们作用点的坐

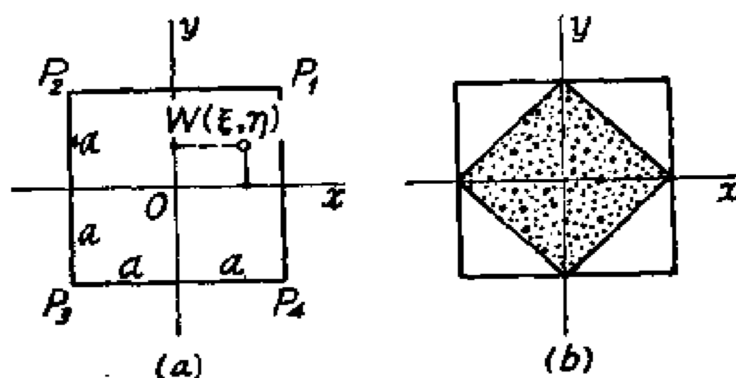


图1.58　一个超静定问题

标分别为：

P_1k 在$(a,a,0)$处；　　P_2k 在$(-a,a,0)$处；

P_3k 在$(-a,-a,0)$处；P_4k 在$(a,-a,0)$处。

于是桌腿被压缩后，桌面四只角的坐标分别为：

$(a,a,-P_1/\lambda)$，　　$(-a,a,-P_2/\lambda)$，

$(-a,-a,-P_3/\lambda)$，$(a,-a,-P_4/\lambda)$。

这四点仍须在同一平面上，由解析几何知，这四点共面的条件是

$$\begin{vmatrix} a & a & -P_1/\lambda & 1 \\ -a & a & -P_3/\lambda & 1 \\ -a & -a & -P_3/\lambda & 1 \\ a & -a & -P_4/\lambda & 1 \end{vmatrix}=0,$$

化简得

$$P_1-P_2+P_3-P_4=0。\qquad (1)$$

这就是附加的变形协调条件。

再列出变形后的平衡方程。设重物所在位置的坐标是(ξ,η,ζ) $(-a\leqslant\xi\leqslant a,\ -a\leqslant\eta\leqslant a)$于是有

$$\sum m_x=0,\qquad (P_1+P_2)a-(P_3+P_4)a-W\eta=0,\qquad (2)$$

$$\sum m_y=0,\qquad (P_2+P_3)a-(P_1+P_4)a+W\xi=0,\qquad (3)$$

$$\sum F_z=0,\qquad P_1+P_2+P_3+P_4=W.\qquad (4)$$

由(1),(2),(3)与(4)联立解出

$$P_1=\frac{W}{4}\left(1+\frac{\xi}{a}+\frac{\eta}{a}\right),\qquad P_2=\frac{W}{4}\left(1-\frac{\xi}{a}+\frac{\eta}{a}\right),$$

$$P_3=\frac{W}{4}\left(1-\frac{\xi}{a}-\frac{\eta}{a}\right),\qquad P_4=\frac{W}{4}\left(1+\frac{\xi}{a}-\frac{\eta}{a}\right).$$

如果 P_1,P_2,P_3 和 P_4 都是大于零，则四条腿都受到压力。这时四条腿全部"脚踏实地"。会不会出现桌腿"悬空"的情况？如果某一个力，例如 P_3，算出的结果是负的，那么这条腿要受拉力。但实际上没有东西把桌腿与地面拴住，所以当 P_3 开始为零时，这条腿就开始悬空不起作用了。当这条腿悬空时其他三条腿的受力情况就要按三条腿的桌子来分析计算了(这是一个静定问题)。为了保证这条腿起作用，即 $P_3\geqslant0$，条件是 $\xi+\eta\leqslant a$。同样的分析可以推出，四条腿全部着地的条件是

$$|\xi|+|\eta|\leqslant a.$$

这就是说重物限于放在图1.58(b)中带点的正方形区内。重物放在带点的正方形区以外的某一点处，就有一条桌腿(哪一条？)不起作用了。这个结论与我们的常识是相符合的。读者试补充求出有一条腿落空时另三条腿中的压力。

例1.3中已说过，应该把数学运算结果回到力学问题中加以讨论，这里再次看到了这一点。▌

1-9 摩擦

摩擦有好几种，通常所说的有干摩擦、粘性摩擦和滚动摩阻。它们的机理和性质是完全不同的。这一节只讲干摩擦或称滑动摩擦，其他两种摩擦将在 4-3 和 6-3 中讨论。

在光滑约束面的情况中，反力沿着约束面的法线方向。如果有摩擦，约束力 $\boldsymbol{R}$ 就不再沿法线方向(图1.59)。可以将 $\boldsymbol{R}$ 分解为法向反力 $\boldsymbol{N}$ 和切向的摩擦力 $\boldsymbol{f}$。当有相对滑动时，摩擦力 $\boldsymbol{f}$ 的方向（切平面内的某一方向）总是和物体相对于约束面的运动方向相反；在还没有发生相对运动的静力学问题中，则与相对运动趋势的方向相反。说"趋势"，因为物体还处于静止状态；如果假想摩擦消失(或忽略)，那么物体就会沿着这个方向产生相对运动。

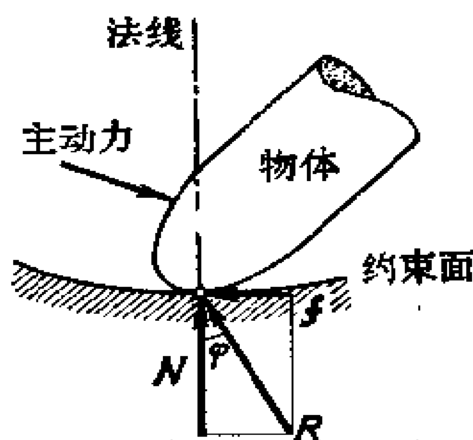


图1.59 有摩擦时的反力

摩擦力的起因是比较复杂的，它要用微观的物理规律才能得到解释。在理论力学中，只从宏观的观点说明摩擦力的性质。摩擦力的大小是和主动力（作用在物体上的外力中除约束力以外的力叫做主动力）的情况有关的。例如，木块放在粗糙水平桌面上，如果不去推它，那么桌面的反力沿竖直方向，即摩擦力是零。如果用水平力去推木块，就有摩擦力阻碍其运动。水平推力越大，相应的摩擦力也变得越大，以保持木块的平衡状态。但是摩擦力有一个上限，当水平推力大到一定程度时，摩擦力再也增大不上去了，木块就开始运动，平衡被破坏了。在一般的平衡情况下，摩擦力的大小是在某一范围内的一个值，即

$$f \leqslant f_{max}, \tag{1.33}$$

这里 f_{max} 就是**最大静摩擦力**，至于 f 的确切的值则应根据平衡条件求出。大量实验表明，这个最大静摩擦力满足**库伦定律**①：最大静摩擦力和当时的法向反力 $\boldsymbol{N}$ 的大小成正比，比例系数 μ 只依赖于物体与约束面材料的性质，与接触面大小无关，即

$$f_{max}=\mu N, \tag{1.34}$$

这里 μ 称为**摩擦系数**，它无量纲。例如，精加工并上了油的金属表面相互之间的摩擦系数是0.10，木材和石头之间的摩擦系数为0.5左右。

将(1.33)和(1.34)结合起来，得出有摩擦力的平衡问题中的基本关系式

$$\boxed{f\leqslant\mu N.} \tag{1.35}$$

当摩擦力达到最大静摩擦力时约束反力 $\boldsymbol{R}$ 和法线的夹角叫做**摩擦角**，用 ε 表示。容易看出有关系

$$\mu=\operatorname{tg}\varepsilon,$$

$$f_{max}=N\operatorname{tg}\varepsilon. \tag{1.36}$$

在一般情况下，约束反力 $\boldsymbol{R}$ 与法线的夹角 φ 小于摩擦角 ε。

例1.15 设梯子靠在墙上，夹角为 θ。墙和地面与梯子之间的摩擦系数均为 μ。梯子长 l，重 Q，重心在中央。人重 W，站在梯子上(图1.60)。问人离梯子下端的距离 a 为多少时能使梯子保持不动。

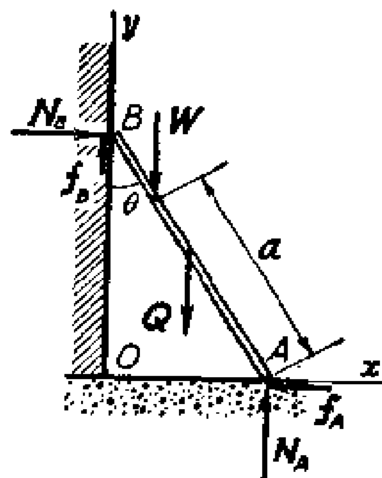


图1.60 梯子的平衡

解 根据滑动的趋势，梯子 A 端有向右的趋势，梯子 B 端有向下的趋

---

① 库伦(Coulomb, C. A. de, 1736—1806，法国人)1781年给出。其实这一定律在库伦以前就已发现，如1740年的一本物理教科书中就已提到摩擦力的性质，并给出了几种材料摩擦系数的数值；还可以追溯到达·芬奇(da Vinci, L., 1452—1519)对摩擦规律的了解，以及1699年阿芒顿(Amontons, G.)对这个规律的重新发现。

势，因而决定了A，B处摩擦力f_A，f_B的指向如图。梯子不滑动时可以列出平衡方程：

$$\sum F_x=0, \qquad N_B-f_A=0,$$

$$\sum F_y=0, \qquad -W-Q+N_A+f_B=0,$$

$$\sum m_A=0, \qquad Wa\sin\theta+Q\frac{l}{2}\sin\theta-f_Bl\sin\theta-N_Bl\cos\theta=0.$$

这里未知量有五个：N_A，N_B，f_A，f_B和a。除了以上三个平衡方程外，还可以根据(1.35)写出两个关系式

$$f_A\leqslant\mu N_A, \qquad f_B\leqslant\mu N_B.$$

解这组方程（三个等式和两个不等式）可以得到a，当然结果也是由一个不等式确定的，如$a\leqslant a_{max}$那样的形式。

求解不等式比较麻烦，特别是联立的不等式。因此，在摩擦问题中，常常采用所谓**临界情况**的方法求解。

设人离梯子下端的距离a逐渐增大到a_{max}，则梯子处于"临界"状态，**即将动而未动**的状态。因为它"将动"，可以用等式$f=f_{max}=\mu N$；因为它"未动"，则又可用平衡条件。所以在这种"将动而未动"的情况下，平衡方程仍然成立（式中a要改为a_{max}），而不等式要用等式代替

$$f_A=\mu N_A, \qquad f_B=\mu N_B.$$

这样就象通常解平衡问题一样，求出五个未知量N_A，N_B，f_A，f_B（它们是在临界情况下的约束反力）和距离a_{max}，即

$$N_A=\frac{1}{1+\mu^2}(Q+W),$$

$$N_B=f_A=\frac{\mu}{(1+\mu^2)}(Q+W),$$

$$f_B=\frac{\mu^2}{1+\mu^2}(Q+W),$$

$$\frac{a_{max}}{l}=\frac{1}{(1+\mu^2)}\left(1+\frac{Q}{W}\right)(\mu^2+\mu\operatorname{ctg}\theta)-\frac{Q}{2W}.$$

因而平衡条件是

$$a \leqslant l\left[\frac{1}{1+\mu^2}\left(1+\frac{Q}{W}\right)(\mu^2+\mu\operatorname{ctg}\theta)-\frac{Q}{2W}\right].$$

以上的结果也可以利用摩擦角的概念，用几何方法直接看出。为了简便起见，假定不计梯子的重量。

通过 A 点作一直线 AD，它与竖直线之间的夹角为摩擦角 ε，

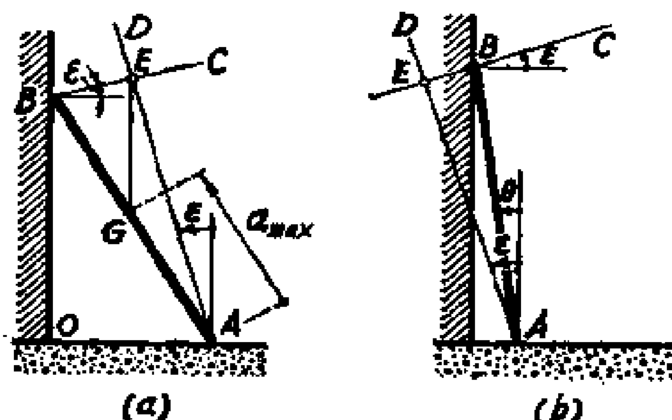


图1.61　摩擦角的应用

通过 B 点作直线 BC，它与水平线之间的夹角也为摩擦角 ε，两条直线相交于 E 点(图1.61(a))。过 E 点作竖直线交 AB 于 G 点。由于 A 点约束反力 $\boldsymbol{R}_A$($\boldsymbol{N}_A$ 和 $\boldsymbol{f}_A$ 的合力)与竖直线的夹角不能大于 ε，而 B 点的约束反力 $\boldsymbol{R}_B$ 与水平线的夹角也不能大于 ε，所以人爬上梯子的最大距离 a_{max} 就是 G 点所对应的 a 值。因为若人站在高于 G 点处，则 $\boldsymbol{R}_A$，$\boldsymbol{R}_B$ 和 $\boldsymbol{W}$ 三力作用线不能相交，那么三力平衡条件就不能满足，即梯子不能平衡。如果将梯子放得很陡($\theta \leqslant \varepsilon$)，则交点 E 将落在 OB 线上或 OB 线的左侧(图1.61(b))，这时人就可以爬到梯子顶端而不致于使梯子的平衡遭到破坏。至于考虑梯子重量 Q 的情形，也可以作类似的讨论，当然几何关系要稍微复杂一些。▎

例1.16　物块 A 重 W，轮 B 重 P，轮子半径为 R，两根轮轴的半径分别为 r_1 和 r_2。轮轴上绕以细绳，一根绳与水平线夹角

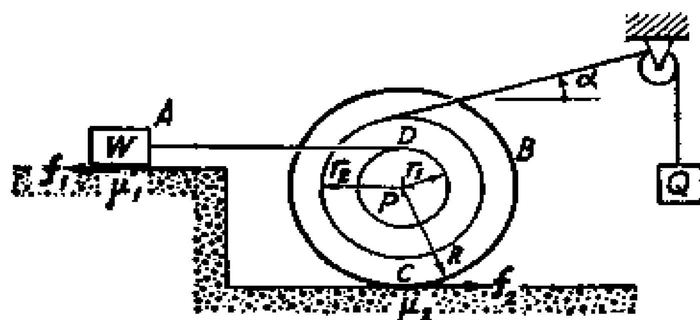


图1.62 求平衡时 Q 的最大值

为 α，通过一光滑的滑轮挂一个重 Q 的重物。另一根绳水平地与物块 A 相连。物块与平面之间摩擦系数为 μ_1，轮子与平面之间的摩擦系数为 μ_2。假定系统所有的力都在同一竖直平面内。求系统保持平衡时 Q 的最大值。

解 以轮子为对象，对轮子与地面接触点 C 取矩得

$$f_1(R+r_1)=Q(r_2+R\cos\alpha),$$

其中 f_1 为水平绳中的张力，它与物块 A 所受摩擦力相等，由上式解出

$$f_1=\frac{r_2+R\cos\alpha}{R+r_1}Q.$$

为保持 A 不滑动，必须有

$$f_1\leqslant\mu_1 W.$$

将上式代入得

$$Q\leqslant\frac{\mu_1(R+r_1)}{r_2+R\cos\alpha}W=Q_1.$$

对 D 点取矩得

$$f_2(R+r_1)=Q(r_2-r_1\cos\alpha),$$

其中 f_2 是地面对轮子的摩擦力，解出

$$f_2=\frac{r_2-r_1\cos\alpha}{R+r_1}Q.$$

为保持轮子与地面之间无相对滑动，必须有

$$f_2 \leqslant \mu_2(P - Q\sin\alpha),$$

将上式代入得

$$Q \leqslant \frac{\mu_2(R+r_1)P}{r_2 - r_1\cos\alpha + \mu_2(R+r_1)\sin\alpha} = Q_2.$$

所以，使整个系统保持平衡的条件是

$$Q \leqslant \min(Q_1, Q_2).$$

如果 Q 不满足这个条件，则当 $Q_1 < Q_2$ 时，A 块先滑动，轮子只滚不滑；当 $Q_2 < Q_1$ 时，轮子先打滑而 A 块不动。 ▌

例1.17 在机械设备、木工、坑道作业中，常采用一种楔块，将楔块打入上下两段支柱之间（图1.63）。设楔块与支柱间的摩擦系数为 μ，求楔块不滑出时顶角 α 的最大值。

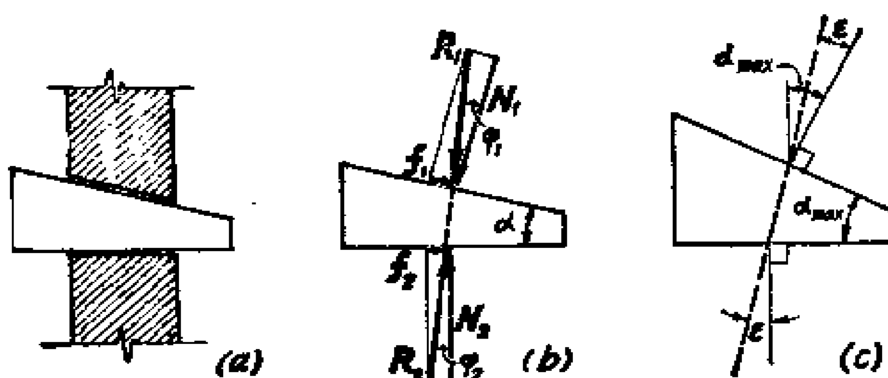


图1.63 自锁现象

解 楔块的受力图如图1.63(b)所示。因为楔块处于平衡，约束反力 $\boldsymbol{R}_1$ 和 $\boldsymbol{R}_2$ 必须共线，而且大小相等方向相反。设 $\boldsymbol{R}_1$ 与 $\boldsymbol{N}_1$ 的夹角为 φ_1，$\boldsymbol{R}_2$ 与 $\boldsymbol{N}_2$ 的夹角为 φ_2（因为 φ_1 和 φ_2 太小，在受力图中看不清楚，因此在图中这两个角度都是经过夸大了的）。显然楔块不会滑出的条件是

$$\varphi_1 \leqslant \varepsilon, \qquad \varphi_2 \leqslant \varepsilon,$$

其中 $\varepsilon = \mathrm{arc\,tg}\,\mu$ 是摩擦角。在临界情况时（图1.63(c)）有

$$\alpha_{max} = 2\varepsilon.$$

所以，只要楔块顶角满足条件

$$\alpha \leqslant 2\varepsilon,$$

则不管外力多大或多小，楔块都能保持平衡而不滑出。这种现象叫做自锁现象。

这个例题当然也可以使用列写平衡方程的分析方法，所得结果是一样的。请读者自行完成。▍

例1.18 有一重 W 的杆，放在互相垂直的两平板之间，如图1.64所示。已知一块平板与水平面夹角为 α，杆与平板之间的摩

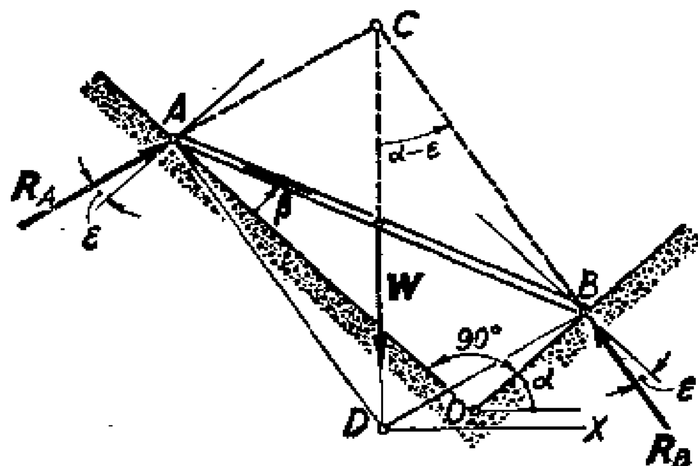


图1.64 利用摩擦角求解

擦系数为 μ。求平衡时杆与另一板之间的夹角 β 的范围，并求 A,B 处摩擦力大小的范围。

解 利用摩擦角的性质求解比较方便。当杆处在将动而未动的临界状态时，摩擦力等于最大静摩擦力，即平板对杆的约束反力与法线的夹角为摩擦角 ε，$\varepsilon=\mathrm{arc\ tg}\,\mu$。

约束反力 $\boldsymbol{R}_A$ 和 $\boldsymbol{R}_B$ 的作用线交于 C 点，过 A,B 点作 $\boldsymbol{R}_A$，$\boldsymbol{R}_B$ 的垂线交于 D 点，$ACBD$ 是矩形。杆共受三个力，根据三力平衡条件，重力（作用线过 AB 中点）作用线必须经过 C 点，因而也经过 D 点（矩形对角线的性)质。A,B,C,D 与 O 五点都在以 AB 为直径的同一个圆上（为什么？），$\angle BDX$ 与 $\angle DAB$ 是

对应同一圆弧的弦切角的圆周角，它们应该相等。另外，从图中不难看出$\angle BDX=\alpha-\varepsilon$，$\angle DAB=\beta+\varepsilon$，因此有$\beta=\alpha-2\varepsilon$。在非临界的时候$\beta>\alpha-2\varepsilon$。同理，可以确定必须有$\alpha+2\varepsilon\geqslant\beta$。所以，当以下条件被满足时，杆能处于平衡状态

$$\alpha+2\varepsilon\geqslant\beta\geqslant\alpha-2\varepsilon.$$

在图示方向临界状态下有

$$R_A=W\sin(\alpha-\varepsilon),\quad R_B=W\cos(\alpha-\varepsilon).$$

因此，摩擦力为

$$f_A=W\sin(\alpha-\varepsilon)\sin\varepsilon,\quad f_B=W\cos(\alpha-\varepsilon)\sin\varepsilon.$$

在非临界状态应有

$$f_A<W\sin(\alpha-\varepsilon)\sin\varepsilon,\quad f_B<W\cos(\alpha-\varepsilon)\sin\varepsilon.$$

同理，在另外一个方向应有：

$$f_A\leqslant W\sin(\alpha+\varepsilon)\sin\varepsilon,\quad f_B\leqslant W\cos(\alpha+\varepsilon)\sin\varepsilon.$$ ▌

1-10 绳索

在1-6中已讲过，绳索的张力总是沿着绳索的方向。如果绳索本身很轻，又不受垂直于绳子方向的力的作用，则绳索的形状是直线。在有些问题中，绳索受到横向力的作用，如重力的作用或者约束的作用，绳索就不再是直的，而是弯的。弯曲的绳索，可以看成是无数段小的直线段的极限，因而绳中张力的方向沿着小直线段的方向[①]，**即绳索中的张力沿着绳索曲线的切线**。这是绳索的基本性质。

例1.19 悬链线 设绳索单位长度的重量为w，求绳索的形态（图1.65）。

解 取绳索的最低点O为坐标原点，x轴水平向右，y轴竖直向上。设$M(x,y)$是绳上一点，M处绳内的张力是$T=T(x)$。取绳OM段为分析对象，作受力图。O点处的张力是水平的，大

---

① 严格一些说，这要求绳索是柔软的（不能抵抗弯矩）且是不可伸长的，这当然是实际绳索（钢丝、缆绳、皮带、链条等）的一个理想化模型。

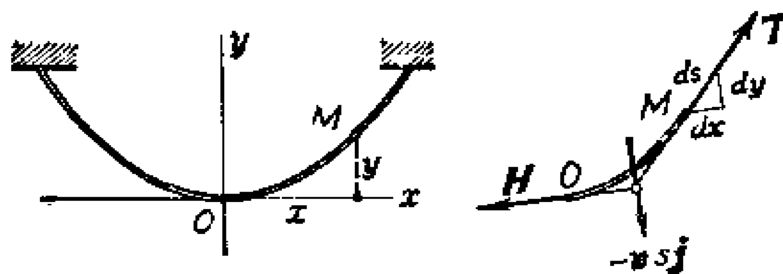


图1.65 悬链线

小为 H，则有 $H=T(0)$。以后将 $T(0)$ 记作 T_0。$\boldsymbol{T}$ 沿切线方向，OM 段自重为 ws，s 为沿 OM 的弧长。由平衡方程得

$$\sum F_x=0,\quad T(x)\frac{dx}{ds}=T_0, \tag{1}$$

$$\sum F_y=0,\quad T(x)\frac{dy}{ds}=ws, \tag{2}$$

其中 T_0 为常量。由(1)和(2)消去 $T(x)$ 得

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{ws}{T_0}. \tag{3}$$

这里 $s=\int_0^x\sqrt{1+(y')^2}\,dx$。为了解方程(3)，我们先将它对 x 求导，得

$$\frac{dy'}{dx}=\frac{w}{T_0}\frac{ds}{dx}=\frac{w}{T_0}\sqrt{1+(y')^2}.$$

分离变量后，自 O 点到 M 点积分，有

$$\int_0^{y'}\frac{dy'}{\sqrt{1+(y')^2}}=\frac{w}{T_0}\int_0^x dx,$$

求得
$$\operatorname{arc\,sinh} y'=\frac{w}{T_0}x.$$

所以
$$\frac{dy}{dx}=y'=\sinh\left(\frac{wx}{T_0}\right).$$

再积分(利用初条件 $x=0$ 时 $y=0$)得

$$y=\frac{T_0}{w}\left(\cosh\frac{wx}{T_0}-1\right).$$

如果我们取常数 $c=\frac{T_0}{w}$ (量纲是常度)，那么得到绳索的方程为

$$y=c\left(\cosh\frac{x}{c}-1\right).$$

这是悬链线的方程。如果 $x\ll c$，可将上式按幂线数展开，得

$$\frac{y}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{c}\right)^2+\frac{1}{24}\left(\frac{x}{c}\right)^4+\cdots\cdots.$$

作为一次近似，可取第一项，即认为曲线的形状是 $y=x^2/2c$，它是一条抛物线。如果 $x\gg c$，则

$$y=\frac{c}{2}e^{\frac{x}{c}}-c,$$

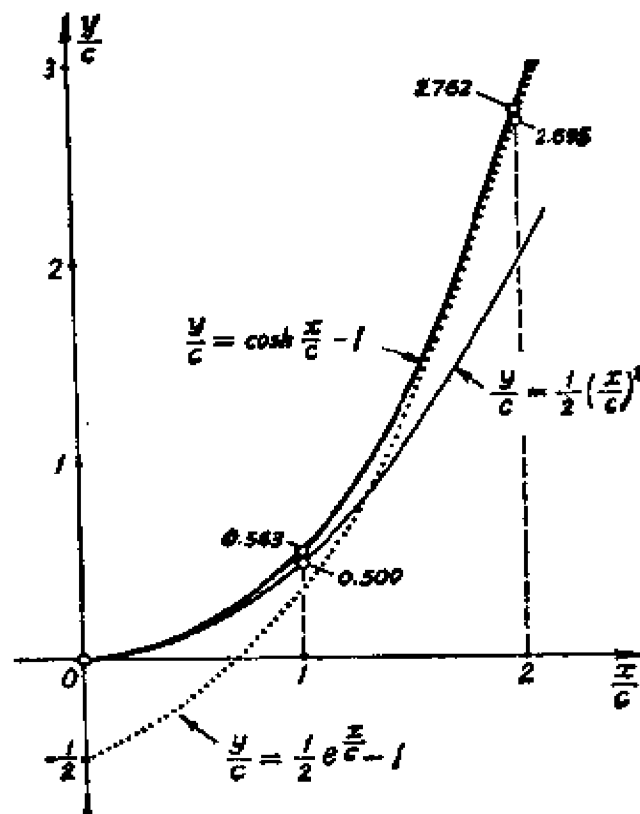


图1.66　悬链线的近似曲线

这是一条指数曲线（图1.66）。▌

＊＊＊　如将上例中的(2)式用 $T(x)dy/ds=wx$ 代替，即假设作用在绳索上的载荷是沿水平方向均匀分布的（比如在悬索桥中，路面悬挂在钢索上），每单位长载荷为 w (图1.67)，求钢索曲线的形状。＊＊＊



图1.67　悬索桥

例1.20 有摩擦时的皮带张力（图1.68）。设皮带与固定圆柱（或滑轮）之间的摩擦系数为μ，皮带绕过的角度为φ。问皮带静止时，两端拉力大小T_1和T_2满足什么关系？

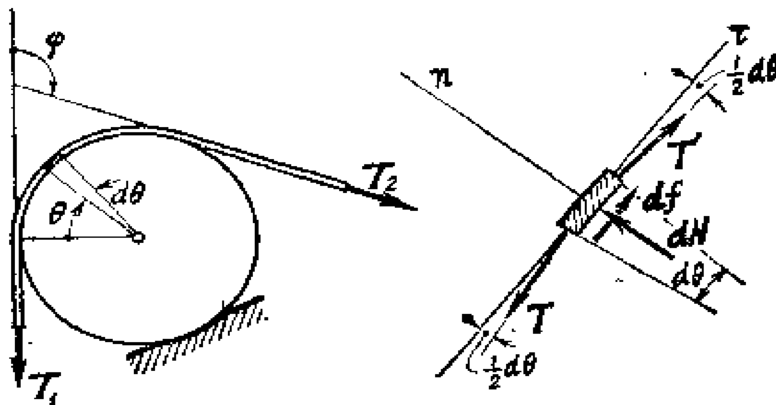


图1.68 皮带内的张力

解 我们分析一种临界情况。设皮带即将趋向T_1那边滑动。取θ处的一个小单元（其中心角为$d\theta$），作出它的受力图。两端张力的大小为$T=T(\theta)$和$T'=T(\theta+\mathrm{d}\theta)\approx T+dT$，法向反力为$\boldsymbol{dN}$，摩擦力大小为$df=\mu dN$。取中点处的切向$\boldsymbol{\tau}$和法向$\boldsymbol{n}$，并在这两个方向列出主向量为零的条件，考虑到小角度的近似关系

$$\sin\left(\frac{1}{2}d\theta\right)\approx\frac{1}{2}d\theta,\quad \cos\left(\frac{1}{2}d\theta\right)\approx 1,$$

则有

$$\sum F_n=O,\quad dN-T\left(\frac{d\theta}{2}\right)-(T+dT)\left(\frac{d\theta}{2}\right)=0,\qquad (1)$$

$$\sum F_\tau=0,\quad T+dT-T+\mu\,dN=0. \qquad (2)$$

在(1)中略去高阶小量得：$dN=Td\theta$。将它代入(2)得

$$dT=-\mu T\,d\theta.$$

分离变量并在$\theta=0$到$\theta=\varphi$之间积分：

$$\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T}=-\int_0^{\varphi}d\theta,$$

因此得
$$\frac{T_1}{T_2}=e^{\mu\varphi}.$$

这是开始向 T_1 那边滑动时的拉力大小之比。同样，如果绳子开始向 T_2 那边滑动，那么有 $T_2/T_1=e^{\mu\varphi}$，或者 $T_1/T_2=e^{-\mu\varphi}$。由此得到平衡条件是

$$e^{-\mu\varphi}\leqslant T_1/T_2\leqslant e^{\mu\varphi}. \quad \blacksquare$$

＊＊＊　为了对上述结果有个定量的了解，设想有一绳子绕树两周，绳的一端作用有500公斤的拉力。问在绳的另一端只要多大的拉力就能保持住绳子不滑动？设树与绳之间的摩擦系数是0.5。＊＊＊

下面给出在分布力①作用下绳索平衡的基本方程。设在绳索的单位长度上作用的分布力为 $\boldsymbol{f}(s)$（图1.69），其中 s 是绳的弧长，$\boldsymbol{f}$ 的量纲是[力]/[长度]。设在弧长 s 处绳索中的张力为 $\boldsymbol{T}(s)$。

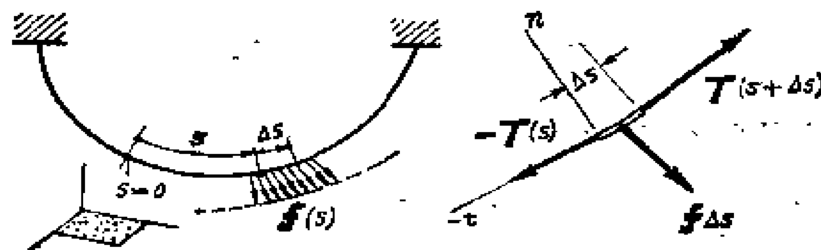


图1.69　绳索的平衡

因为在 s 处切断绳索时，绳索有两个断面，我们规定顺着 s 方向的张力为 $\boldsymbol{T}(s)$，逆着 s 方向的张力为 $-\boldsymbol{T}(s)$（作用力和反作用力的关系）。我们在弧长 s 处取微小单元 Δs 为分析对象，则作用在小单元上的力有三个：$-\boldsymbol{T}(s)$，$\boldsymbol{T}(s+\Delta s)$ 和 $\boldsymbol{f}\,\Delta s$。由三力平衡条件得

$$\boldsymbol{T}(s+\Delta s)-\boldsymbol{T}(s)+\boldsymbol{f}\cdot\Delta s=0.$$

两边同除以 Δs：

$$\frac{\boldsymbol{T}(s+\Delta s)-\boldsymbol{T}(s)}{\Delta S}+\boldsymbol{f}=0.$$

---

① 集中力是指作用在一点的力，而分布力是指作用在线（或面积、或体积）上的力。关于同时有集中力和分布力作用时绳索平衡的基本方程，可以利用单位脉冲函数（见本书5-4）来推导，也可以将绳索分段处理。

当 $\Delta s \to 0$ 时，取极限得

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}+\boldsymbol{f}=0, \tag{1.37}$$

其中 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 都是弧长 s 的向量函数。这就是绳索平衡的基本方程。在直角坐标系中，有

$$T_x=T\frac{dx}{ds},\quad T_y=T\frac{dy}{ds},\quad T_z=T\frac{dz}{ds}.$$

所以式(1.37)写成分量形式为

$$\begin{cases}\dfrac{d}{ds}\left(T\dfrac{dx}{ds}\right)+f_x=0,\\[2ex] \dfrac{d}{ds}\left(T\dfrac{dy}{ds}\right)+f_y=0,\\[2ex] \dfrac{d}{ds}\left(T\dfrac{dz}{ds}\right)+f_z=0,\end{cases} \tag{1.38}$$

其中弧长微分 ds 和坐标微分 dx,dy,dz 之间有关系式

$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2$，即 $\left(\dfrac{dx}{ds}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{ds}\right)^2+\left(\dfrac{dz}{ds}\right)^2=1$.

式(1.37)可以分别写成在切线方向和主法线方向两个数量方程。因为 $\boldsymbol{T}(s)=T(s)\boldsymbol{\tau}$，$\dfrac{d\boldsymbol{T}}{ds}=\dfrac{dT}{ds}\boldsymbol{\tau}+\dfrac{T}{\rho}\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 分别是切向和法向（主法向）的单位向量，ρ 是曲线的曲率半径①，所以有

$$\begin{cases}\dfrac{dT}{ds}+f_\tau=0,\\[2ex] \dfrac{T}{\rho}+f_n=0.\end{cases} \tag{1.39}$$

* * *　利用基本方程(1.38)解例1.19。 * * *

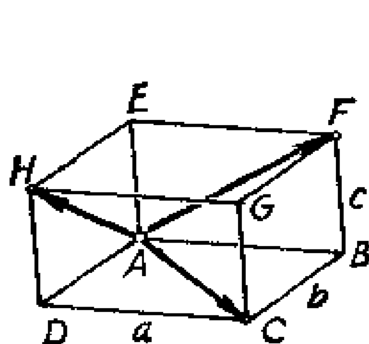
* * *　利用基本方程(1.39)解例1.20。 * * *

---

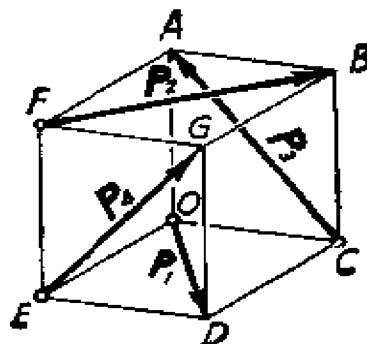
① 关于主法线方向详见本书2-1。

习　　题

1.1　作用于长方体（长、宽、高为 a,b,c）顶点 A 处的三力，由向量 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AF}$ 和 $\overrightarrow{AH}$（大小和方向）表出。求它们的合力。



题 1.1 图



题 1.2 图

1.2　在边长为 a 的正方体顶点 O，F，C 和 E 上作用有四个大小都等于 P 的力，方向如图。求此力系的主向量。

1.3　正四面体每边长 a，沿不相交的两棱边上各有一力作用，大小都是 P。求这力系的主向量的大小。

1.4　ABC 是一直角三角形，$\angle A$ 是直角，AD 为高线。证明：如果沿着 $\overrightarrow{AB}$ 作用一数值为 $1/\overline{AB}$ 的力，沿着 $\overrightarrow{AC}$ 作用一数值为 $1/\overline{AC}$ 的力，则两力的合力等于沿着 $\overrightarrow{AD}$ 作用的、数值等于 $1/\overline{AD}$ 的力。

1.5　两轴的交角为 α，一力 $\boldsymbol{F}$ 在这两轴上的投影分别为 F_1 和 F_2，求力 $\boldsymbol{F}$。设两轴的单位向量分别为 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$。

1.6　直锥体高 h，底是边长为 $a=4h$ 的正方形。设一斜棱上有一力 $\boldsymbol{F}$，求：①这力在其他三斜棱上的分量；②这力在其他三斜棱上的投影。

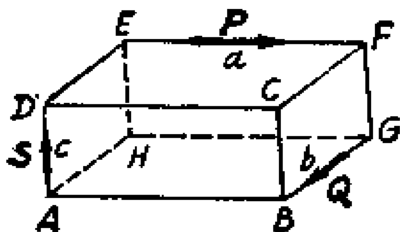
1.7　已知 $\boldsymbol{e}_1$ 经过直角坐标系 $Oxyz$ 中的点 $(0,0,0)$ 和 $(1,1,$

1)，e_2 在 Oxy 平面内；(e_1, e_2, e_3) 是正交单位向量基。求向量 $2i+4j+3k$ 在这组基中的分量。

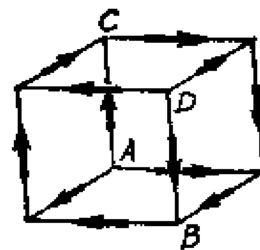
1.8　条件同1.2题，求此力系关于 O 点的主矩和中心轴方程。

1.9　条件同1.3题。求这力系对四面体中心点主矩的大小。

1.10　长方体的三边 $EF=a$，$GB=b$，$AD=c$。沿这三边作用三力 P, Q, S。求这力系的主向量、对 H 点的主矩和对 HC 轴的矩。



题 1.10 图



题 1.11 图

1.11　大小均为 P 的十二个力组成六对力偶，作用于正方体的棱边上(如图)。求合力偶矩的大小和方向。

1.12　求证：平面上一力系，各力（按比例画出向量）依次首尾相接，构成一封闭多边形，则此力系与一力偶等效，它的力偶矩的大小等于多边形面积的两倍。

1.13　已知空间三个力（大小不为零）对任一点的主矩等于零。证明：这三个力的作用线在同一平面内（提示：在三力的作用线上分别取不在同一直线上的三个点，先证明三力与这三点决定的平面共面）。由此证明：三力平衡的一个必要条件是三力作用线共面。

1.14　证明：作用在一刚体上的任何力系（设第二不变量不为零)，能用与中心轴线成同一角度且大小相等的两个力代替。

1.15　给定三力：$P_1(3, 5, 4)$，其作用点$(0, 2, 1)$；$P_2(-2, 2, -6)$，其作用点$(1, -1, 3)$；$P_3(-1, -7, 2)$，其

作用点（2，3，1）。试向坐标原点简化此力系。

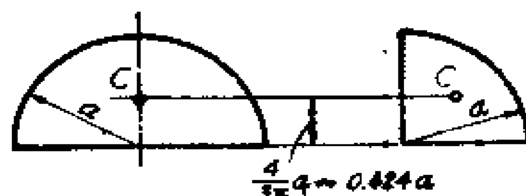
1.16　证明以下定理：一给定力系对空间任意两点的主矩在通过该两点之轴上的投影彼此相等。

1.17　已知空间中某力系已简化成两力。证明此两力作用线的公垂线与原力系的中心轴正交。

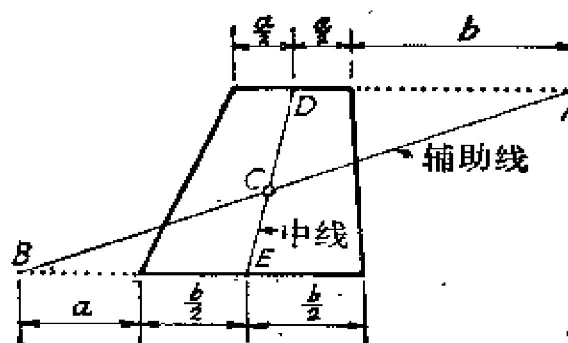
1.18　已知空间力系对于其化简中心的主矩的大小有定值，求该化简中心的轨迹。

1.19　验证下列各小题所给均匀薄板或体积的重心位置在图中 C 处。

（1）半径为 a 的半圆和四分之一圆的薄板；

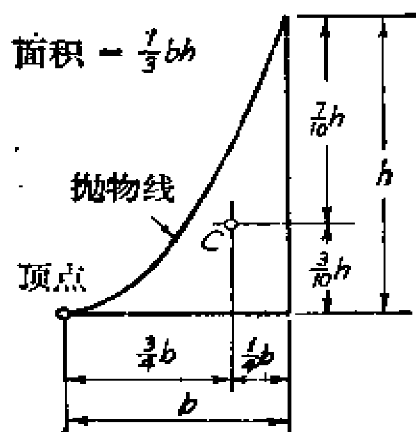


题 1.19(1) 图

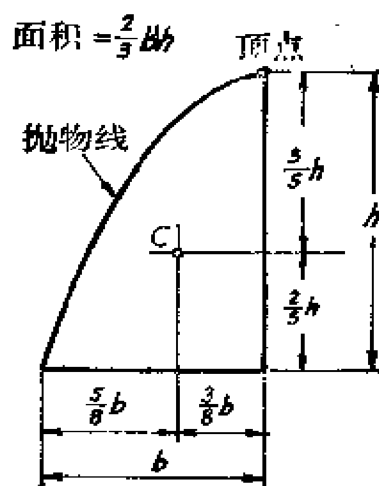


题 1.19(2) 图

（2）上底长为 a，下底长为 b 的梯形板；



题 1.19(3) 图



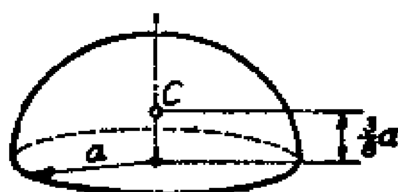
题 1.19(4) 图

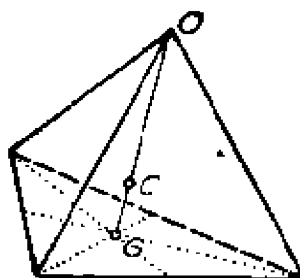
（3）底长为 b，高为 h，斜边为凹抛物线的三角板；

（4）底长为 b，高为 h，斜边为凸抛物线的三角板；

（5）半径为 a 的实心半球体；

（6）锥体。





体积 $=\frac{2}{3}\pi a^3$

题 1.19(5) 图

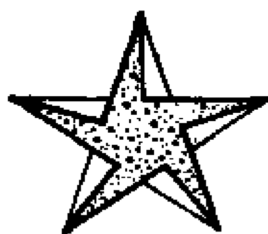
体积 $=\frac{1}{3}$底×高，G 是底面的重心，$OC=3OG/4$

题 1.19(6) 图

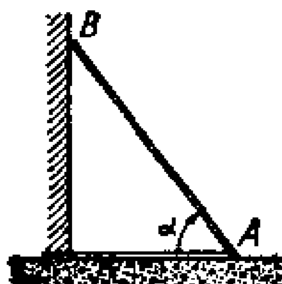
1.20 一均匀的半圆球中挖去一圆柱体（包括球冠），圆柱体的轴线与半圆球的底面垂直且通过圆心。求此体积的重心。

1.21 均匀的铁丝弯成一三角形。证明：此铁丝的重心在三角形三边的中点所组成的小三角形的内切圆圆心处。

1.22 均匀厚度的正五角星挖去五个小三角如图。证明：剩余部分（带点的区域）的重心仍在几何中心处。



题 1.22 图



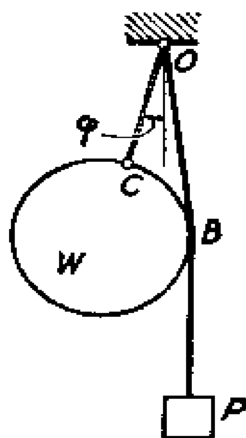
题 1.23 图

1.23 重 W 的梯子（重心在中央）与水平成 $\alpha=60^\circ$ 角，倚于光滑的墙和光滑的地面之间，下端用绳系于墙角。计算绳内的张力、墙和地面的反作用力。

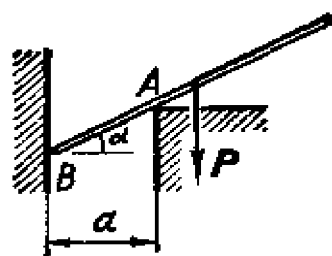
1.24 图示均质圆柱重 W，砝码重 P，OC 长 l，圆柱半径

为 a。求平衡时 OC 与竖直线的夹角 φ。

1.25 长 $2l$ 重 P 的均匀杆子靠在光滑之墙上。求平衡位置 $\alpha=?$ 及 A 点和 B 点处的反力。设所有接触都是光滑的。

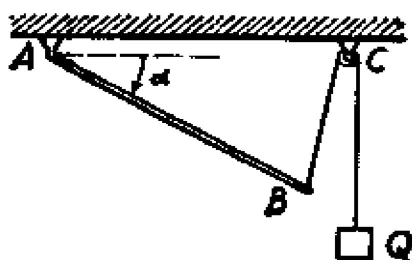


题 1.24 图

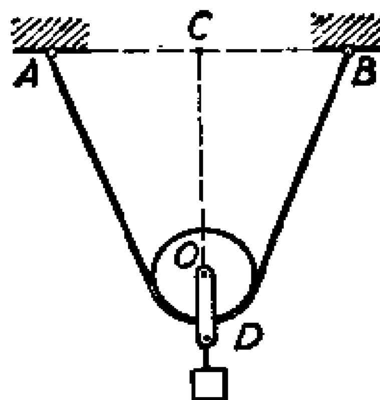


题 1.25 图

1.26 长 $2a$ 重 P 的均匀棒 AB 之上端以铰链固定于定点 A，其下端系一绳，此绳绕过与 A 点在同水平上之小滑轮 C（轮的半径可忽略不计），绳的自由端悬一重物 Q。已知 $AB=AC$，不计绳重和摩擦。求平衡时 α 的值及铰链 A 处的反力。



题 1.26 图

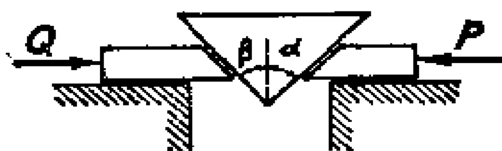


题 1.27 图

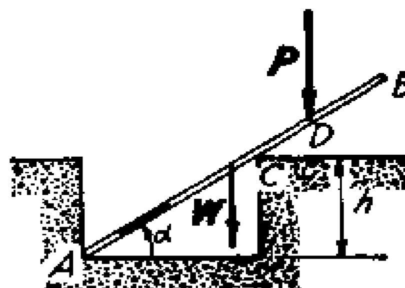
1.27 半径为 r 之滑轮挂于铁丝 ADB 上，滑轮与所挂重物共重 W。如 $AC=BC=a$，$OC=b$，A，B 两点位于同一水平面上。求铁丝中的张力。

1.28 图示尖劈搁在水平木条上，尖劈重 W，其两边与竖直线各成 α 和 β 角。设平衡时施于木条上的力为 P 和 Q，不计摩擦。求 P，Q 和 W 之间的关系。

1.29 重P的人沿着长为$2a$重为W并与水平面成α角的板



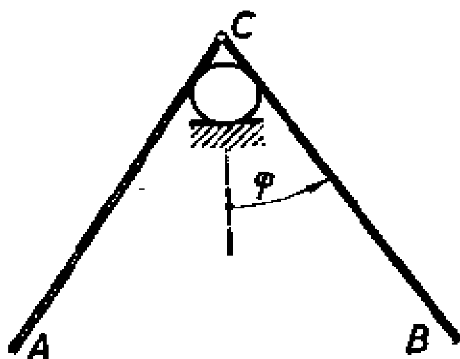
题 1.28 图



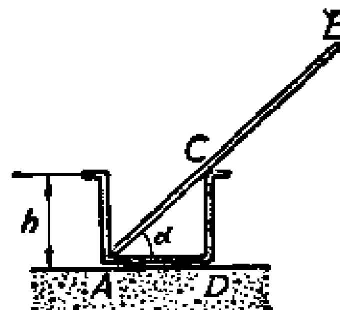
题 1.29 图

子行走，板子搁在深为h的沟里(如图)。不计板与地之间的摩擦。计算A，C点的反作用力与人的位置（$AD=x$）之间的关系。指出x为何值时平衡被破坏。

1.30 两根相同的均质棒，各重为P，长为$2l$，以铰链C互相连结并靠在一个半径为r，对称轴为水平的光滑固定圆柱上。求系统平衡时的角度φ（$\angle ACB$之半）所满足的方程、圆柱的反力和铰链C处的约束力。



题 1.30 图



题 1.31 图

1.31 直径为a高为h之圆桶（有底）内，靠有直杆AB。桶的质量为M，杆的质量为m，杆与桶光滑接触。求系统平衡时杆的最大长度。

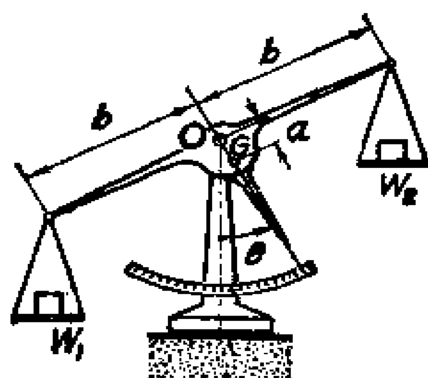
1.32 一轻的杆子全杆横在半球形的光滑碗内，碗半径等于r。一重块W钉于距杆端分别为a与b处($a+b<2r$)。证明：在

平衡状态时，杆子与水平面的夹角θ满足方程

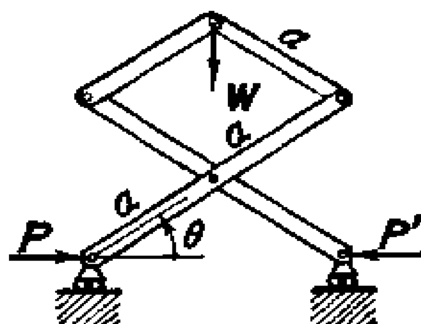
$$2\sqrt{r^2-ab}\sin\theta=a-b.$$

1.33 一不准确的天平，两秤盘挂在距支点分别等于a和b的横梁上。两盘本身能互相平衡。一物体在两盘中各自称出的重量分别为P和Q，求物体的准确重量，并证明$b/a=\sqrt{Q/P}$。

1.34 图示天平一边重量W_1略大于另一边的重量W_2。天平活动部分自身重W，其重心G在支点O的下面，且$OG=a$。求偏角θ和重量(W,W_1,W_2)、尺寸(a,b)的关系。尺寸应怎样选择才能使天平有高灵敏度，即对同样的(W_1-W_2)能产生较大的偏角θ。



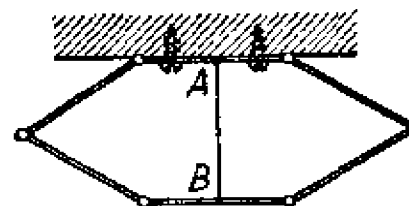
题 1.34 图



题 1.35 图

1.35 图示机构由两长两短的四根杆连接而成。设$\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{P}'$，求平衡时$P/W$与$\theta$的关系。

1.36 六根各重W长l的均质杆，用铰链连成一个六边形，其中一杆用螺钉固定在天花板上。上下杆的中点用一细绳AB相连结，绳长为a $(a<2l)$。求绳中张力。



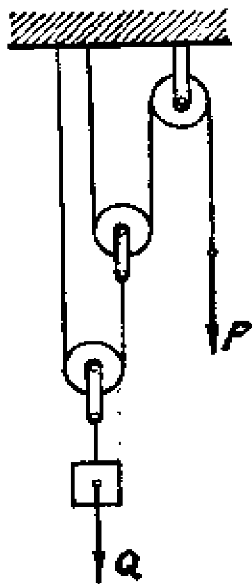
题 1.36 图

1.37 一均匀重杆的一端静止在不光滑的水平面上，另一端则由一绳系于固定点。若θ,φ及ψ各自代表绳子、杆子及平面对杆的支承反力与向上竖直线所成之角度，证明：

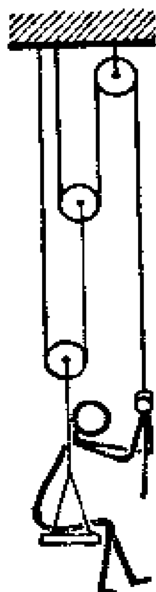
$$\text{ctg}\,\theta \pm 2\text{ctg}\,\varphi - \text{ctg}\,\psi = 0.$$

1.38 若四边形的四角顶在同一圆周上，则由沿着四边作用的四力所组成的力系与零等效的必要且充分条件是：力的大小须与对面的边长成正比，方向两两相对（或相背）。

1.39 一弹性绳的原长（未变形时的长度）为 a，弹簧常数为 k，两端分别固定在同一高度的两点，两点间的距离也是 a。今在绳中央挂上一重量 W，求平衡时绳子与水平线的夹角 α 所满足的方程。（提示：当 $W=0.3ka$ 时，$\sin\alpha=0.6$。）



题 1.40 图

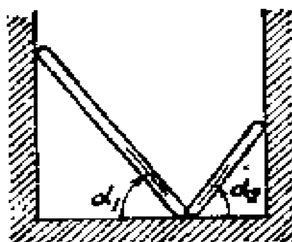


题 1.41 图

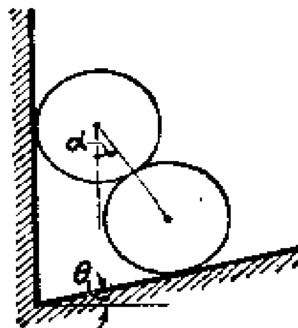
1.40 图示滑轮系统，物重为 Q，动滑轮每个重为 q。不计摩擦。求平衡时拉力 P 之值。试推广到有 n 个动滑轮时的情况。

1.41 体重为70公斤的工人，坐在图示木板上并保持不动。不计滑轮和板的重量，不计摩擦。求他手中的拉力 P 为何值？

1.42 两根位于竖



题 1.42 图

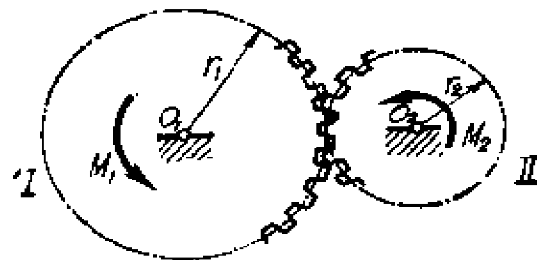


题 1.43 图

直平面内的均质杆之底端彼此相靠地搁在光滑地面上，其上端则靠在两堵竖直而光滑的墙上，杆长分别为 $2a_1, 2a_2$，其重量分别为 P_1 和 P_2。求平衡时杆与水平的倾角 α_1 与 α_2 之间的关系。

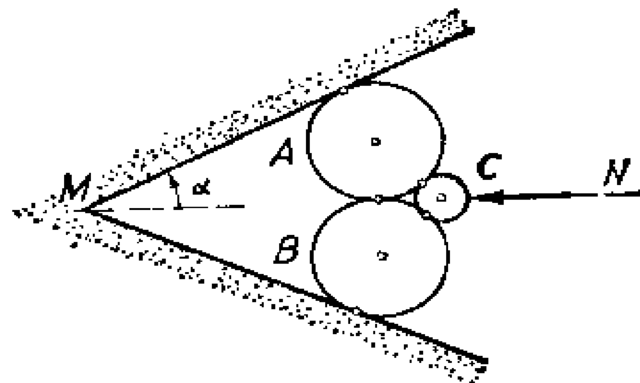
1.43 两个相同的均质光滑圆柱放在倾角为 θ 的斜面和竖直面之间。求平衡时两圆柱的轴线所在的平面与竖直面的夹角 α 为何值？

1.44 两个啮合的平面齿轮Ⅰ和Ⅱ的节圆半径分别为 r_1 和 r_2，作用在齿轮Ⅰ上的力偶矩为 M_1。求平衡时作用在齿轮Ⅱ上的力偶矩 M_2，作用在两个轮轴上的反力 $\boldsymbol{R}_1$ 和 $\boldsymbol{R}_2$。



题 1.44 图

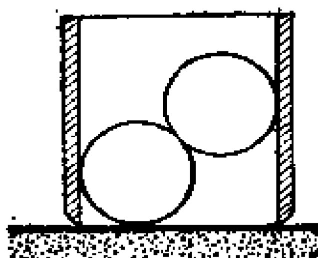
1.45 夹角为 2α 之两堵墙，夹着两个半径为 R 的圆盘 A 和 B，以第三个圆盘 C 沿着分角线 MN 方向推 A 和 B。C 的半径为 r，所有接触处都光滑。当 r 很小时，用力一推就能把 A 和 B 推开，当 r 很大时，A 和 B 必定推不开。求能推开之最大 r 值。



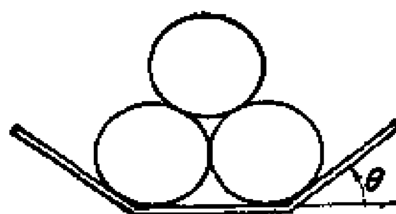
题 1.45 图

1.46 相同的两个均质球，半径为 r 重为 P，放在一个内半径为 R 的中空而两端开口的直圆筒内，该圆筒搁在水平的地面上。如忽略柱壁的厚度不计，求圆柱内的球不致翻倒时圆筒的最小重量 Q（见图）。

1.47 三个相同的重为 P 的圆柱形零件堆在一起，其中心形成一个正三角形。下面两个放在槽内且彼此正好接触。设槽侧面



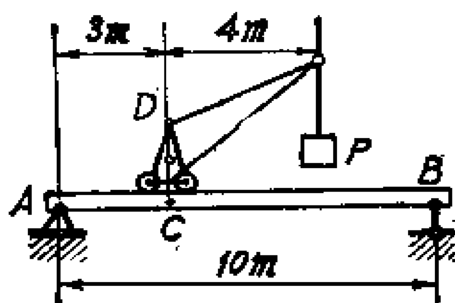
题 1.46 图



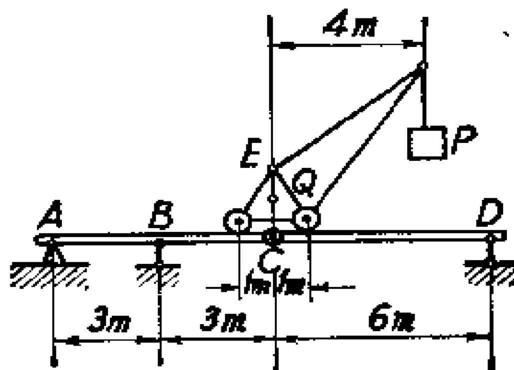
题 1.47 图

倾角为 θ，不计摩擦，求槽底所受压力（以 P 和 θ 表示之）。从所得结果说明 θ 至少应为多少才能挡住零件使下面两个圆柱不被推开。

1.48　梁 AB 长 10 米，在梁上铺设有起重机轨道。起重机重 5 吨，其重心在竖直线 CD 上。重物的重量 $P=1$ 吨，梁重 3 吨。起重机位置尺寸如图，起重机的伸臂和梁在同一竖直面内。求支座 A 和 B 的反力。



题 1.48 图

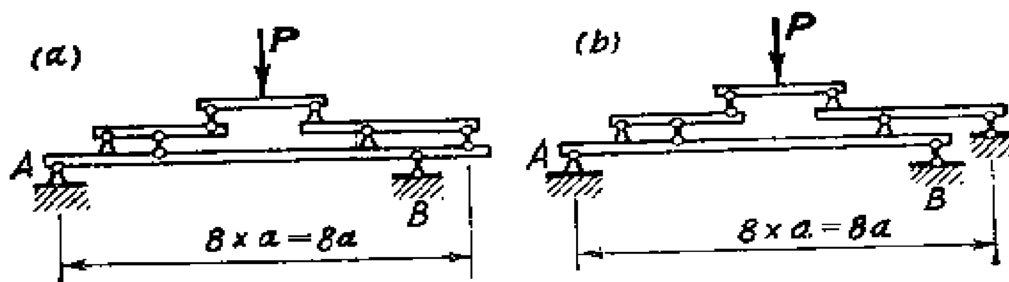


题 1.49 图

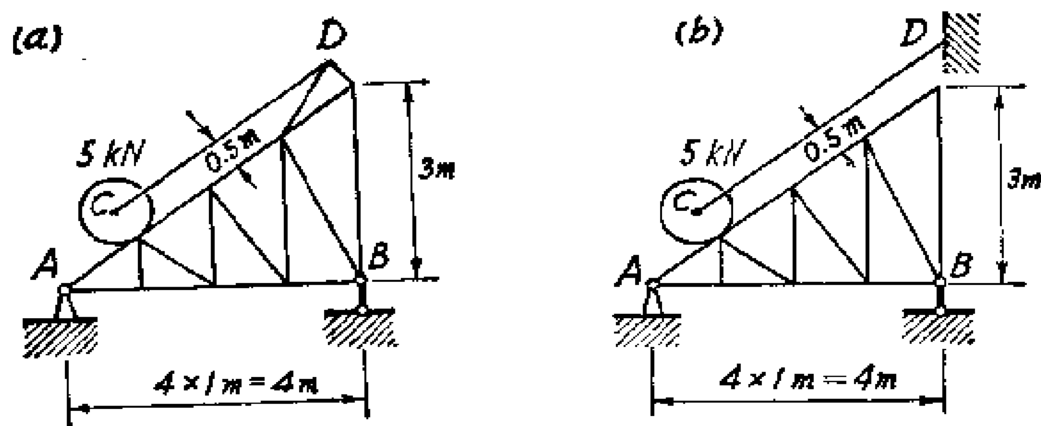
1.49　起重机在连续梁上，载有重物 $P=1$吨。起重机重 $Q=5$吨，其重心位于竖直线 EC 上。不计梁重。求支座 A，B 和 D 处的约束反力。

1.50　图示两个结构，分别求支座 A，B 处的反力。

1.51　图示两个桁架，载荷 C 的重量都是 5kN，分别求支座 A，B 处的反力。

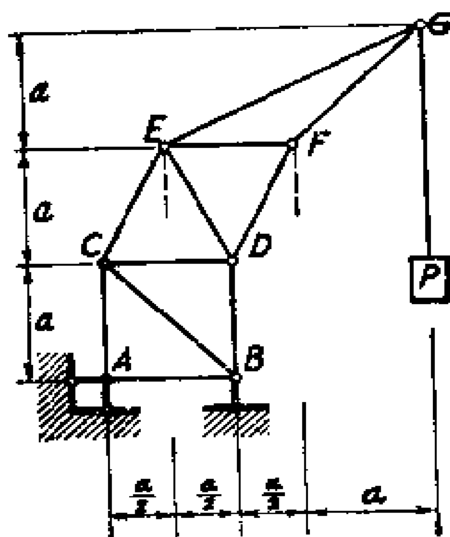


题 1.50 图

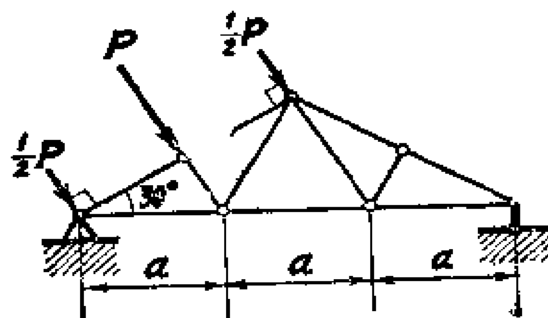


题 1.51 图

1.52　求图示桁架各杆的内力，载荷及尺寸如图。



题 1.52 图

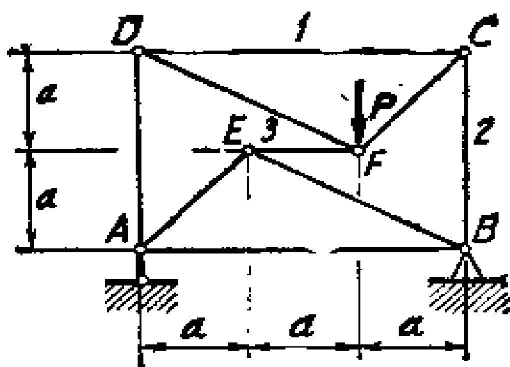


题 1.53 图

1.53　求图示桁架各杆的内力，载荷及尺寸如图。

1.54　求图示桁架中杆 1，2 和

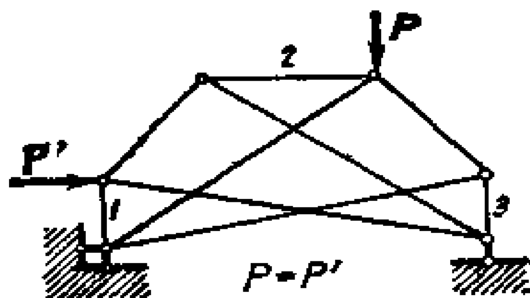
3 的内力。载荷及尺寸如图。



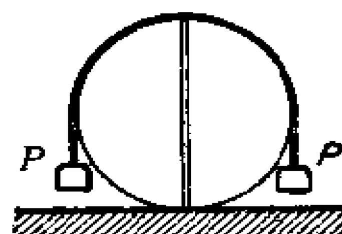
题 1.54 图

1.55 图示桁架为半个正八角形，载荷如图。求杆1,2 和 3 的内力。

1.56 均质圆柱体切成相等的两半。有一绳跨过它们而把它们合在一起。绳的两端各挂有重 P 的物块。整个圆柱体重 Q。两个半圆柱体的接触面是铅垂的。不计绳与柱面的摩擦。要使这两个半圆柱不分开，问重物的重量 P 至少应为多少？



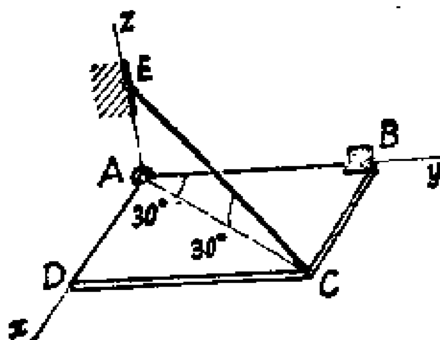
题 1.55 图



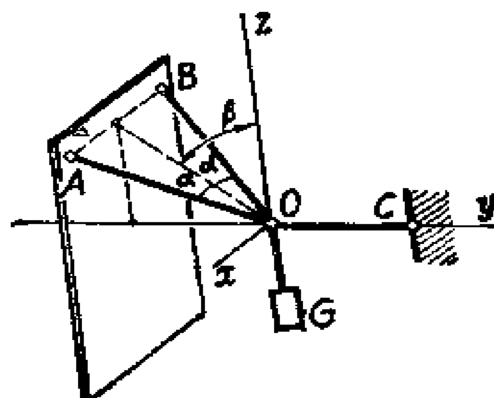
题 1.56 图

1.57 两重量相等的小环能沿着一光滑的椭圆铁丝环滑动。椭圆的长轴是竖直的。两环由一线连结，线搭在钉于上边焦点的光滑钉子上。证明：这两个环能有无穷多个平衡位置。（提示：只要证明线中的张力与小环的位置无关。张力为常值，即 $T=W/e$，W是小环重量，e 是椭圆的偏心率。）

1.58 均质长方形薄板重 $Q=20$公斤，用球铰链 A 和柱铰链 B 与墙连结，并用绳子CE维持水平位置。绳子 CE缚在薄板上的 C 点并挂在钉子 E 上，钉子钉入墙内并和 A 点在同一竖直线上。$\angle ECA=\angle BAC=30°$。求绳中张力和支座$A$，$B$ 的反力。



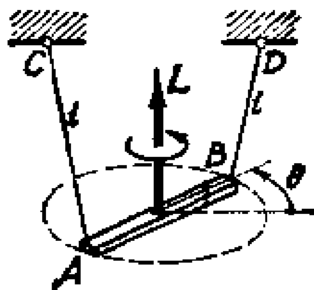
题 1.58 图



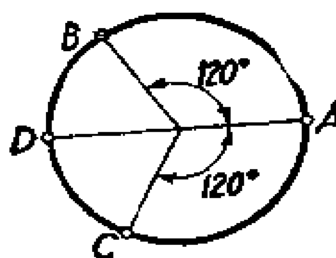
题 1.59 图

1.59 图为空气动力天平上的一个悬挂节点，可用来测试模型的阻力。若节点 O 上所受的载荷是重为 G 的砝码。试求钢丝 OA，OB 和 OC 的张力。已知钢丝 OA 和 OB 的平面与竖直线成 β 角并与 Oyz 平面垂直。这些钢丝与上述平面相对称并与之成 α 角。钢丝 OC 为水平并沿 Oy 轴。

1.60 均质杆 AB，长为 $2r$，重为 W，在其两端用长为 l 的两平行绳挂起。悬挂点 C，D 之间的距离也为 $2r$。如在杆上作用一水平面内的力偶，其矩为 L。求 L 和杆转过的角度 θ 之间的关系。



题 1.60 图



题 1.61 图

1.61 重 W 的三条腿的圆桌，从上往下看，三腿与地面的接触点恰好与桌面边缘的 A，B 和 C 点重合。今在桌面边缘介于 B，C 之间的 D 处放一重为 P 的物体。计算各条腿压地面之力。当 P

为多大时圆桌将翻倒？

1.62　三条长度等于l_1, l_2, l_3的线绳系在一重量等于W的均匀三角形板的三个角顶上，线绳的另一端合系于一固定点，三角板不在竖直平面内。证明：线绳中的张力等于 kWl_1, kWl_2, kWl_3，其中

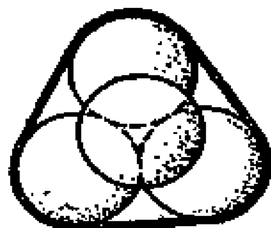
$$k=[3(l_1^2+l_2^2+l_3^2)-(a^2+b^2+c^2)]^{-\frac{1}{2}},$$

其中 a, b, c 为三角形板的三边长。

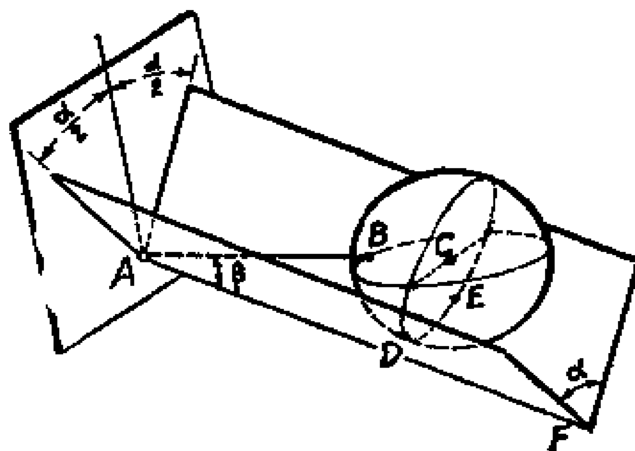
1.63　求证：任意力系平衡的必要且充分条件是它对一个四面体六条边中每一条边的力矩之和均为零。

1.64　四个相同的均质圆球一同静止在一光滑的球形碗内，它们的中心同在一水平面上。今以另一相同的圆球放置在四球之上。证明：若碗的半径大于圆球半径的（$2\sqrt{13}+1$）倍，则四球将互相分离。

1.65　在光滑的水平桌面上一条绳子把三个相同的均质圆球捆在一起。绳所在的平面平行桌面而且过三球的中心。今在三球上又放一个相同的球，设球重均为W，求绳中张力至少应为多少时才能使底下的三个球不分开？



题 1.65 图

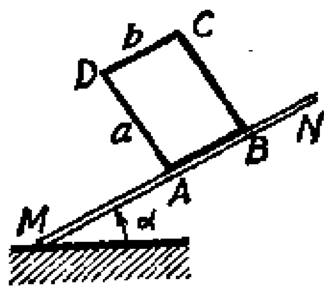


题 1.66 图

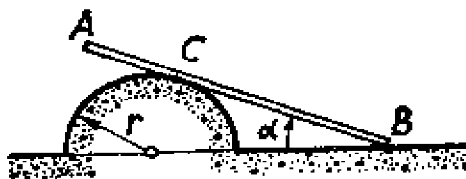
1.66　半径为r，重为W的球C，放在一个V形槽内，槽轴AF与水平面成β角，即$\angle BAF=\angle\beta$，槽的两个侧面与竖直面的交线所夹的角被竖直线平分。为了防止球的滚动，用水平线 AB

将它拉住，不计摩擦。求绳中张力。（图中D和E点是球与槽侧面的接触点。）

1.67 重为P的均匀长方体$ABCD$，其底面搁在粗糙的斜面MN上。今使斜面与水平面的夹角α逐渐增大，问长方体开始沿斜面滑动或绕棱A翻倒时，α应为何值？已知棱长$AB=b$，$AD=a$，长方体与斜面之间的摩擦系数为μ。



题 1.67 图

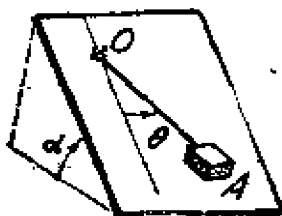


题 1.68 图

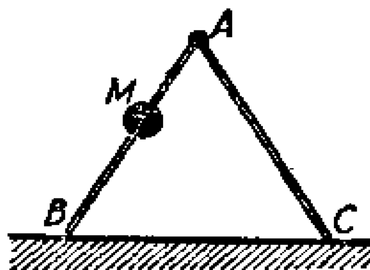
1.68 长为$2a$重为P的均质直杆AB倚放在水平面上及半径为r的固定圆柱面上。杆与水平面及圆柱面之间的摩擦系数为μ，杆与圆柱轴线保持垂直。求直杆处于平衡状态时之最大α角。

1.69 一甲虫与一半径为r的半球形之碗间的摩擦系数$\mu=0.30$。问甲虫在碗中能爬到怎样的高度？

1.70 一小方块A放在倾角为α的粗糙斜面上，摩擦系数$\mu=\text{tg}\varepsilon$，且$\varepsilon<\alpha$。方块A由一线系于斜面上一定点O，试求平衡时线与斜面的最大倾斜线之间的最大夹角θ。

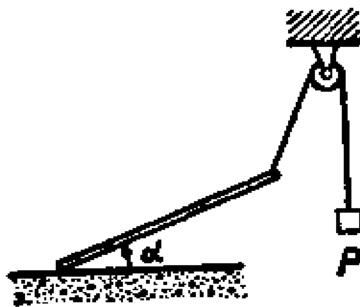


题 1.70 图



题 1.71 图

1.71 双足均匀折梯立在地面上，每足重 $P=10$ 公斤，长 $l=4$ 米。梯足与地面之间的摩擦系数 $\mu=0.5$，$\angle ABC=\angle ACB=60^\circ$，铰链 A 光滑。如果一体重 $W=80$ 公斤的人 M 爬上此梯，问这人爬上的最大高度（此时梯子不滑开）。



题 1.72 图

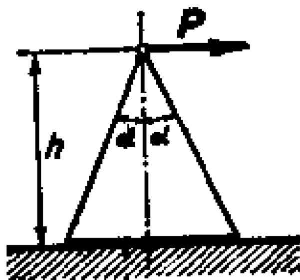
1.72 重 W 的均匀棒一端搁在粗糙的地面上，摩擦系数为 μ；另一端系一绳，此绳通过滑轮挂一重 P 的物块，不计滑轮摩擦。为保持角 α 不变，求重物 P 的最大重量。

1.73 两重量均为 W_1 的小环能在不光滑的水平杆上滑动，环与杆之间的摩擦系数为 μ。两小环由长为 l 的线段相联系，在线的中点又挂着另一重量等于 $2W_2$ 的小环。求小环 W_1 在杆上不滑动时之最大分离长度。

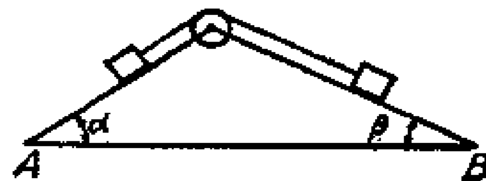
1.74 柜子的抽屉长 a 宽 b，前板上两个把手之间的距离为 $h<b$。问摩擦系数至少为何值时，用垂直于前板的力拉一个把手，不管使多大的力都拉不出来。

1.75 顶角为 2α，高为 h，重为 W 的均匀圆锥体放在水平面上，摩擦系数为 μ。在锥顶作用一水平力 P，试讨论平衡破坏时锥体有怎样的运动趋势。

1.76 图示物块与斜面间的摩擦系数 $\mu=\text{tg}\varepsilon$，不计滑轮摩



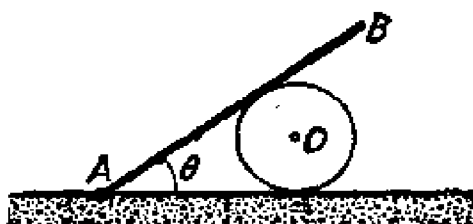
题 1.75 图



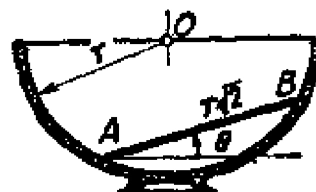
题 1.76 图

擦。当斜面底面 AB 水平放置时，物块刚好向左边滑动。证明：当抬高左边使底边 AB 与水平面成 2ε 角时，则物块刚好向右边滑动。

1.77 长为 $2l$ 的均质杆 AB 搁在半径为 r 的均质圆柱体上，杆轴与圆柱轴互相垂直，杆轴与圆柱重心在同一竖直平面内，A 点为光滑铰支，其余接触处的摩擦系数均为 μ。求平衡时杆与水平面的夹角 θ 的最大值。



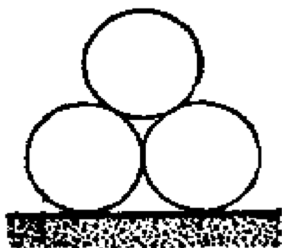
题 1.77 图

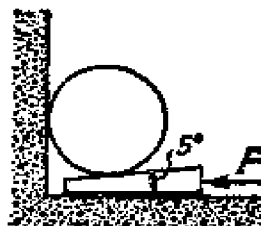


题 1.78 图

1.78 一均质直杆放在不光滑的半球形碗内，直杆与球心保持在同一竖直平面内。杆长是球半径的$\sqrt{2}$倍，杆与碗壁的摩擦系数为 μ。求平衡时杆与水平面的最大倾角 θ，并说明 μ 值在什么范围内时，杆子始终在碗内。

1.79 如图所示，三个相同的、均质的圆柱体堆放在水平面上，所有接触处的摩擦系数均为 μ，为使上面的圆柱体能放上去，求 μ 值至少应为多少？


题 1.79 图

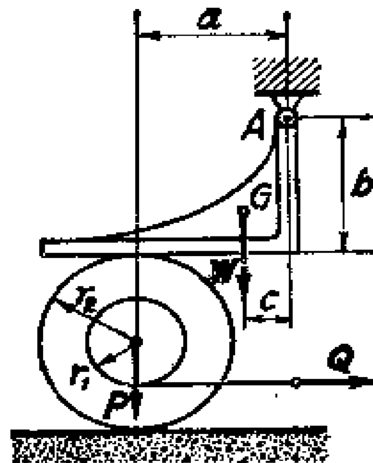


题 1.80 图

1.80 重 10 公斤的均质圆柱体放在倾角为 5° 的楔和竖直墙

之间，所有接触处的摩擦系数均是μ，$\mu=0.25$。不计楔的重量，求水平推力的大小P为多少时才能推动楔？

1.81 悬挂着的三角架的重量是w，重心在G。轮轴重P。悬挂点A处为光滑铰支，其他接触处的摩擦系数都是μ。尺寸如图所示。求这机构平衡时水平拉力Q的最大值($a>\mu b$)。

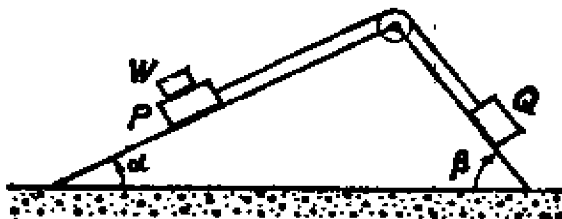


题 1.81 图

1.82 停在地面上之四轮大车，车身重W，车轮重量可以不计。车轮外半径为a，轮轴半径为b，轴与轴瓦间的摩擦系数为$\mu=\text{tg}\varepsilon$。今以水平力F拉车，不计轮与地面间的滚动摩阻，求拉动大车的最小水平拉力F。

1.83 均匀的杆子放在粗糙的水平面上，在杆子的一端作用一垂直于杆子的水平方向的力。当平衡破坏时杆子将绕那一点转动？

1.84 一质点放在粗糙斜面上，斜面倾角正好等于质点与斜面间的摩擦角。一线穿过斜面上一小孔后与质点相联，徐徐牵动线的另一端使质点在斜面上作极缓慢的移动（时时处于临界平衡状态）。若起始时质点位置高于小孔，证明：质点的轨迹起先是最大倾斜线，然后是一半圆弧。



题 1.85 图

1.85 图示两重物，材料相同，各重P和Q。摩擦系数$\mu=\text{tg}\,\varepsilon$。不计滑轮摩擦与绳重，开始时$Q$刚能向下滑，今在$P$上加一重为$W$的物块。证明：能加在$P$上面保持系统平衡状态的最大重量$W$等于

$$P\sin 2\varepsilon\sin(\alpha+\beta)/\sin(\alpha-\varepsilon)\sin(\beta-\varepsilon)。$$

1.86　两材料不同的重物放在粗糙的斜面上。斜面的倾角等于 α。两重物由一根拉直的绳子连系着，此绳与斜面的最大倾斜线成 45° 角。下面重物的重量等于上面重物的两倍，而它与斜面之间的摩擦系数 μ 只等于上面的一半。若两重物在上述情形下刚好能滑动，问摩擦系数 μ 等于多少？

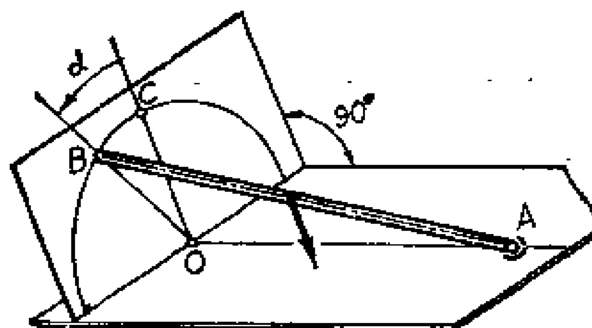
1.87　两钉子的连线与水平面成 θ 角。一不光滑的、均匀的杆经过低处钉子的下边，压在高处钉子的上边。后者比杆的重心低，杆的重心到两钉子的距离分别为 a 和 b ($b>a$)，钉子与杆间的摩擦系数等于 μ。若杆刚能滑动，证明

$$\mu=(b-a)\operatorname{tg}\theta/(a+b).$$

1.88　长 l 的直杆（不一定均匀）下端 A 用球铰链与地面相连，上端 B 靠在粗糙的竖直墙上，A 点与墙的距离 $AO=a<l$。设杆正趋滑动时，平面 AOB 与竖直平面 AOC 的夹角为 α。证明杆与墙之间的摩擦系数

$$\mu=\sqrt{(l/a)^2-1}\operatorname{tg}\alpha$$

（提示：B 处摩擦力应沿图中圆弧的切线方向）。



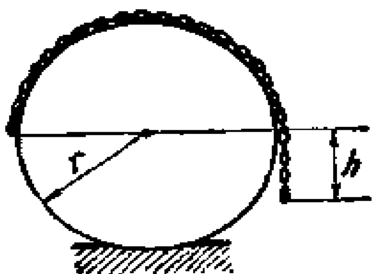
题 1.88 图

1.89　一重绳子长度等于 l，挂在两钉子上。在这两钉子处，绳子的切线方向与水平线分别成 α 和 β 角。证明：两钉子的高度差等于

$$l\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sec\frac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

1.90　长 $2l$ 的均质重链，其两端悬挂在同一水平线上的两点 A 与 B 上。端点切线与水平线成 45° 角。求链条的垂度（即链子的最低点与两钉子连线间的距离）。

1.91 长 $2l$ 重 Q 的均质链条，其两端挂在同一水平线上的两点 A 与 B 上。已知垂度为 f，求端点处链条中的张力 T。

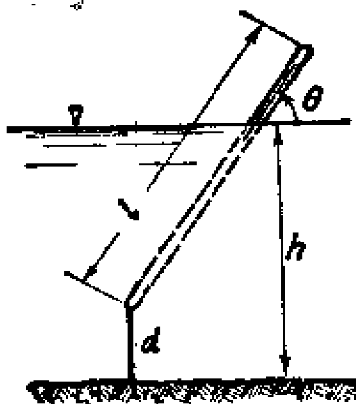


题 1.92 图

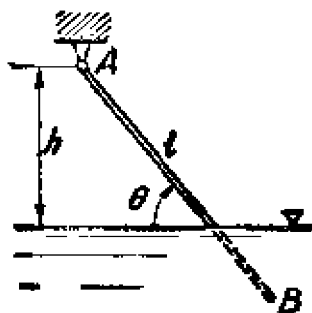
1.92 一根均质的链条放在半径为 r 的固定圆柱上，其所在的竖直平面与圆柱轴垂直。设链条的一端刚好在水平直径处，另一端下垂长度为 h。链条与圆柱间的摩擦系数为 μ。求平衡时下垂长度 h 的最大值。

1.93 静水压强与水深的关系。设水的重度为 γ（单位体积的重量），利用平衡条件证明在水深 h 处的压强是 $p_0+\gamma h$，其中 p_0 是水表面处的大气压强。（提示：取一竖直的柱体为受力对象，柱体上底在水表面，下底在 h 深处。）

1.94 长为 l，比重为 $\gamma(<1)$ 的均质细长直杆，其一端由长为 d 的细线与河底相连，水深为 $h(>d)$。求平衡时杆与水平面的夹角 θ 为何值？



题 1.94 图

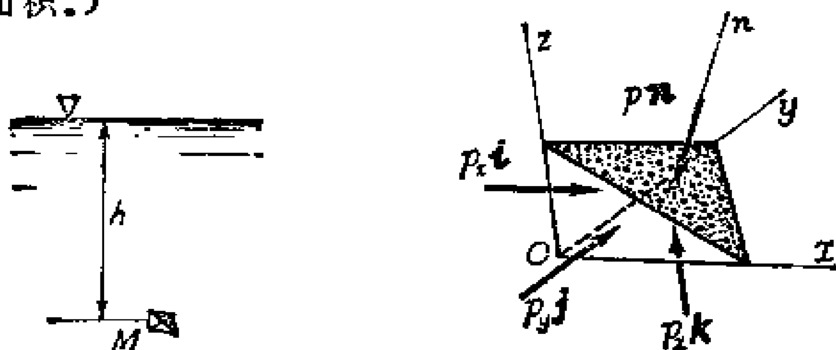


题 1.95 图

1.95 长为 l，密度为 ρ_1 的均质细直杆 AB，其一端悬挂于固定点 A，另一端浸在密度为 ρ_2 的液体中 $(\rho_2>\rho_1)$。A 点离液面的距离为 $h(<l)$。求平衡时杆与液面的夹角 θ。

1.96 静水压强是各向均等的证明。在液体中某一点M处（如图）取一小单元体，单元体的形状是四面体，其中三侧面平行于坐标面，第四面（斜面）的外法线的方向余弦为(α,β,γ)。作出小单元体的受力图，三侧面受到的压强分别为$p_x\boldsymbol{i}, p_y\boldsymbol{j}$和$p_z\boldsymbol{k}$，第四面受到的压强为$-p\boldsymbol{n}$，忽略小单元体自重。利用共点力系的平衡条件，证明$p=p_x=p_y=p_z$。

（提示：先证明$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i}=\alpha$，侧面积$\Delta A_x=\alpha\Delta A$，…。$\Delta A$是斜面的面积。）

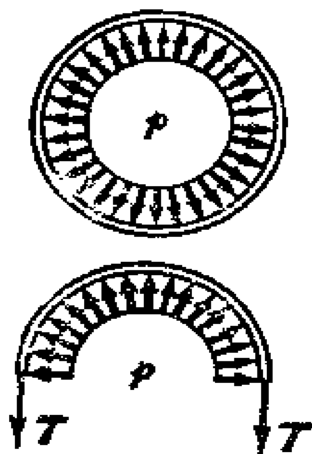


题 1.96 图

1.97 薄壁容器的箍向拉力。薄壁圆柱形容器的半径为a，内压强为P。求单位长度圆柱壁受到的拉力大小T。

（提示：取半个容器作为平衡对象。）

1.98 静水压力引起的反力。半圆拱ACB的半径为a，左端A为铰链，右端B为连杆。拱受到静水压力的作用，设水的重度为γ，求垂直于



题 1.97 图



题 1.98 图

纸面单位宽度的拱所受到的支座反力。

（提示：拱上每点的静水压力垂直于圆拱的表面，压强大小由题1.93给出。沿圆弧取微元，而后用积分。）

第二章　点的运动学

在运动学中我们不考虑产生运动变化的原因，只分析物体是怎样运动的，以及确立合适的方法去描述这些运动。在第一章中已研究了作用在物体上的力，在第二、三章中将研究物体的运动，随后我们就可以进一步去研究力和运动之间的关系，这就是动力学的内容。因为在运动学中，讨论的问题与质点的质量无关，所以不妨把它抽象成为一个不计质量，沒有大小的几何点。因此，质点的运动学就抽象成为一个几何点的运动学。

绪言中说过，在机械运动中，物体在空间改变自己的位形（位置和形状）。抽象一些说，物体既占据一定的位形，又不断否定自身所占据的位形；或者说，在每一瞬间，既在那里，又不在那里，既是那个形状，又不是那个形状，既动，又不动。沒有电影胶卷上"不动"的画面，就看不到银幕上"运动"的景象。我国古代哲学著作《庄子》说："镞矢之疾（飞箭那样快），而有不行不止之时。"古希腊的芝诺（Zeno）也有类似的思想，提出"飞矢不动"的说法。这种朴素的辩证观点，只是定性地说出了运动的主要特点，但要精确地描述运动，还要有合适的数学工具。这就需要微分法，因此"只有微分学才使自然科学有可能用数学来不仅仅表明**状态**，并且也表明**过程**：运动"①。在历史上，微积分的产生是和力学中对运动的分析紧密连系着的。伽利略（Galileo Galilei，1564—1642）曾经研究过变速度运动，初步有了加速度的概念，但还只涉及常加速度的情况。牛顿在归纳行星的运动规律时，进一步研究了变加速度的情况。也正是在这种研究

① 恩格斯：《自然辩证法》，人民出版社1971年版，249页．黑体字是原文中就有的．

中，牛顿创立了微分学。点的运动学在牛顿和莱布尼兹（Leibniz, G.W., 1646—1716）那个时期，基本上已经完备了。后来，欧拉（Euler, L., 1707—1783）更进一步用微分学发展了刚体的运动学（1765年）。之后，法国的普安索[①]（Poinsot, L.,1777—1859）又给出了刚体运动的几何图象。十九世纪，采用了向量表示方法，最近几十年来，则更进一步引进了矩阵及张量的表示方法。

运动学分两章讲。这一章是点的运动学，下一章是刚体运动学与复合运动。

2-1 参考系、速度、加速度

要描述物体的位置以及它的运动，就必须首先选取另一个物体作为参考。当你"静坐"在行驶着的公共汽车中的时候，站在马路上的观察者却看到你是在运动。这说明对于汽车这个参考体和对于地球这另一个参考体来说，同一个点或物体的运动方式是不一样的。同样，有人要问地球是怎样运动的？如果不说清楚相对哪个参考体，我们就无法回答。在理论力学中，我们选取某一个三维的、不变形的物体作为参考体，并在参考体上取不共面的三相交线作为标架[②]。这个标架和参考体是固连在一起的，它可以代表参考体，我们把它叫做**参考系**。例如，可以在汽车的车厢上安置一个固连的标架，也可以在地面上安置一个固连的标架，使它的三个方向分别沿着当地的经线、纬线和天顶。这就是两个不同的参考系。参考体总是一个大小有限之物，但当我们装上标架以后，我们将认为这个标架可以延伸到空间的无限远处。因此，参考系应理解为与参考体相固连的整个空间（一个理论上抽象的三维空间）。比如，可以选用地球为参考体，讨论离开地球很远很远的一个行星的运动。在那里，地球这个"实体"是达不

---

① 第一章中刚体上力系简化的理论也是由普安索作出的。

② 三线不一定正交，在线上也不必规定正负指向和单位长度，因而标架在概念上宽于直角坐标架。

到了，而作为参考系却可以延伸过去。

在有的情况下，可能只有参考系，而不一定有真实的参考体。例如，设想从地球中心出发，引出三根线，指向三个恒星[①]。这个标架的原点（三条线的交点）与地心一起运动，标架的三根轴方向不变，这也是一个参考系，称为地心参考系(图2.1)。但是并不存在真实的参考体，它和地心参考系标架相固连。地球本身在地心参考系中绕着一根固定轴（由地心指向北极星附近的一个点）旋转，每86164秒（一个恒星日）转过2π弧度。以后我们就只提参考系，而不提参考体了。一般工程技术问题中，如果不特别声明，总是选取地球作为参考系。

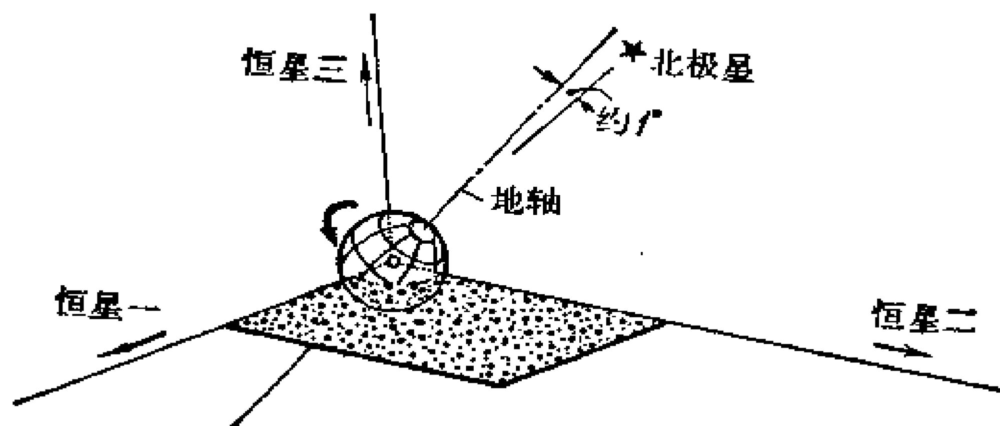


图2.1　地心参考系

参考系和坐标系是两个不同的概念。参考系选定了，物体是静止还是运动，以及是作怎样的运动才有确定的意义，然后才可以在参考系中安置一定的坐标系。在同一个参考系中可以安置许多不同的坐标系。如在1-2中我们曾经讨论过，在斜坡上安置两个坐标系，但参考系是同一个，都是地球。另外，坐标系还可以有各种不同的形式，直角坐标和极坐标是最常用的两种形式。

① 其实只要取与地球不共线的两个恒星就可以了。

在讨论一般的理论问题时，我们总是希望所得的结果不依赖于坐标系的选择，也就是说希望所得的结果对于各种不同的坐标系都能适用。为此通常总是先用向量① 表示出各种量之间的关系。在求解具体问题时，再选用合适的坐标系。

一点M相对某一参考系的位置可以这样来描述，在这参考系中任意选取一个固连点O（相对于这个参考系固定不动），则M点的位置表示成为向量

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM},$$

称为M点在该参考系中相对于O点的向径。比如一个人造卫星，在地面上看(以地球为参考系)，它的位置用向径$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$描述(图2.2)，而在飞机上看(以飞机为参考系)，它的位置用向径$\boldsymbol{r}'=\overrightarrow{O'M}$描述，其中$O$与$O'$分别是地面上及飞机上的一个固连点，显然$\boldsymbol{r}$与$\boldsymbol{r}'$是不相同的。

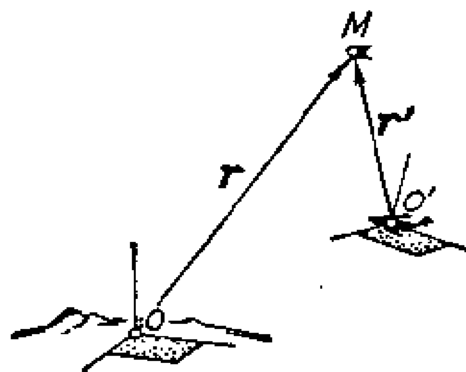


图2.2 不同参考系中的向径

＊＊＊对于地心参考系，M点的向径应该怎样取？＊＊＊

M点在空间的位置随时间连续地变化；相应地$\boldsymbol{r}$就是一个时间t的连续的向量函数，写成

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)。\qquad(2.1)$$

它称为点的向量形式的**运动方程**。因为对于确定的瞬时t，它给出了点在空间的确定的位置。所以，如果一个点的运动方程知道了，则可以认为点的运动情况已经全部掌握了。

从一个向量函数的角度看，当其自变量t从零开始连续增大时，向量的端点将在空间划出一条曲线，好象一支笔的笔尖（注

---

① 在向量不够用时还要用张量。

意这支笔的长度是在不断地变化，而它的尾部是固定不动的）在纸上划出一条线一样（因为不存在三维的纸，所以我们只好用二维的纸来作比拟）。这条曲线叫做**向量端图**。向径 $\boldsymbol{r}$ 的向量端图（图2.3）就是M点在空间运动过程中划出的轨迹。轨迹是空间的一条几何曲线，它不包含时间的因素。比如告诉你M点的轨迹是一个圆，你还不能知道它哪一时刻在圆上的哪一点，因为关于运动情况的信息还不够。又如铁路只说明列车的运动轨迹，它并不规定列车的运动情况。如果有一张"火车时刻表"，它规定某时某刻列车离起始站的距离（沿铁路线量），那么列车的运动就确定下来了。在一般情况下，我们在轨迹上取一点 M_0 作为弧长 s 的起算点①，并且规定一个指向为 s 的正向，那么**轨迹方程**连同**弧长方程** $s=s(t)$ 一起，就和运动方程一样，给出了点的运动的全部信息。

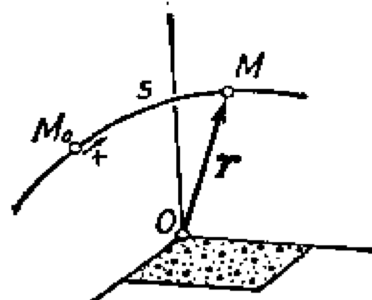


图2.3　点的向径和轨迹

在进一步讲运动学以前，我们先复习一下有关单位向量和向量导数的一些性质。如果有一个向量函数 $\boldsymbol{A}(t)$，当自变量 t 发生变化时（这里的 t 不一定是指时间，也可以是指弧长等），它的大小和方向都要发生变化。为了反映这一性质，可以将 $\boldsymbol{A}$ 写成

$$\boldsymbol{A}=A\boldsymbol{A}^0, \tag{2.2}$$

其中标量 A 表示向量 $\boldsymbol{A}$ 的大小（向量 $\boldsymbol{A}$ 的模），它是 t 的标量函数，而 $\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{A}/A$ 称为向量 $\boldsymbol{A}$ 的**单位向量**。它是 t 的向量函数。当 t 变化时，$\boldsymbol{A}^0$ 的向量端图是单位球面上的一条曲线。如果 $\boldsymbol{A}$ 被限制在平面上，那么这向量端图是单位圆的一段。

向量 $\boldsymbol{A}$ 对 t 的导数定义为

① 起算点不一定要取在 $t=0$ 时 M 点的位置。

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)}{\Delta t}.$$

从定义出发可以证明有以下类似于标量函数的求导法则：

$$\frac{d}{dt}(\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{B})=\alpha\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}+\beta\frac{d\boldsymbol{B}}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}(\lambda\boldsymbol{A})=\frac{d\lambda}{dt}\boldsymbol{A}+\lambda\frac{d\boldsymbol{A}}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{B}}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\frac{d\boldsymbol{B}}{dt},$$

其中 α,β 分别是常标量，λ 是自变量 t 的标量函数，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是向量函数。

据根求导法则，将式(2.2)对 t 求一次导数，便得

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\frac{dA}{dt}\boldsymbol{A}^0+A\frac{d\boldsymbol{A}^0}{dt},\tag{2.3}$$

其中$\frac{d\boldsymbol{A}^0}{dt}$是单位向量的导数，一般说来它并不是单位向量。

因为

$$\boldsymbol{A}^0\cdot\boldsymbol{A}^0=1,$$

对此式求导一次，得

$$2\boldsymbol{A}^0\cdot\frac{d\boldsymbol{A}^0}{dt}=0.$$

由此可见，单位向量的导数必与其自身垂直。从几何上看，$\frac{d\boldsymbol{A}^0}{dt}$必定在 $\boldsymbol{A}^0$ 的向量端图 C 所在的单位球面的切平面之中(图2.4)。

特别在平面问题中，它就在单位圆周的切线方向。

从式(2.3)可以看出，当自变量 t 变化时，向量 $\boldsymbol{A}$ 的变化由两部分构成：大小的改变和方向的改变。如果 $\boldsymbol{A}$ 的大小始终不变，即 $\boldsymbol{A}$ 的向量端图在以常量 A 为半径的球面上，则第一项为零；如果 $\boldsymbol{A}$ 的方向（相应地 $\boldsymbol{A}^0$ 的方向）始终不变，即 $\boldsymbol{A}$ 的向量端图是一条直线，则第二项为零。在特殊的情况中，$\boldsymbol{A}$ 的大小和方向都不随自变量 t 改变，即 $\boldsymbol{A}$ 是常向量，显然这两项就都是零。

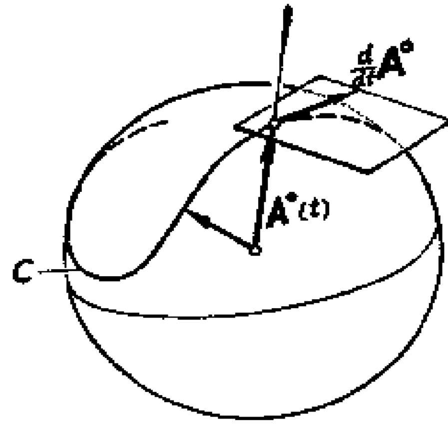


图2.4　$\boldsymbol{A}^0(t)$ 的向量端图

现在回到点的运动的描述。速度是刻划点的运动特征的基本物理量。设由时刻 t 到 $t+\Delta t$，点从 M 运动到 M'（图2.5），相应的向径 $\boldsymbol{r}$ 变到 $\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}$，那么 $\Delta\boldsymbol{r}=\overrightarrow{MM'}$ 就是时间间隔 Δt 内点的位移。在这间隔内点的平均速度是

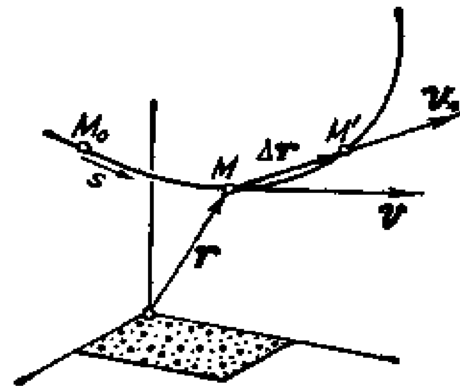


图2.5　点的速度

$$\boldsymbol{v}_*=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}.$$

时间间隔的大小取得不同，得到的平均速度（大小和方向）也不同。因此用平均速度就不足以准确地刻划点的真实运动状态。为了使位置的变化得到精确的描述，我们采用了重要的一步。令 $\Delta t\to0$，即考虑 M' 趋向于 M 时平均速度的极限

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt},$$

以此作为描述点在时刻 t 的运动状态的特征量。这就是点在时刻 t 的**瞬时速度**，或简称**速度**。瞬时速度的概念是从实际情况（在很小很小时间间隔内的平均速度）的一种抽象。这种抽象正确地反映了点既在 M（因为 M' 趋向 M）又不在 M（因为 M' 和 M 是两个点）这一根本矛盾。运用微分法描述了运动，描述了过程，这种"科学的（正确的、郑重的、非瞎说的）抽象"，"更深刻地、更完全地反映着自然"（列宁语）。

今后常用字母上加一点表示对时间 t 的导数，于是速度 $\boldsymbol{v}$ 和向径 $\boldsymbol{r}$ 的关系是

$$\boxed{\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}.} \tag{2.4}$$

根据式(2.3)，可将点的速度写成

$$\boldsymbol{v}=\dot{r}\boldsymbol{r}^0+r\dot{\boldsymbol{r}}^0, \tag{2.5}$$

其中 $\boldsymbol{r}^0$ 是向径 $\boldsymbol{r}$ 的单位向量。此式说明点的速度是由两部分组成的：一部分是由于向径大小的改变所产生的；另一部分是由于向径方向的改变所产生的。前一部分沿着向径的方向，称为**径向速度**，后一部分与向径垂直，称为**横向速度**。

应用弧长方程，可将式(2.4)写成

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{ds}{dt}. \tag{2.6}$$

因为任一曲线的弦长与弧长之比的极限是单位值，所以有

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right|=\lim_{M'\to M}\left|\frac{\overline{MM'}}{\overset{\frown}{MM'}}\right|=1.$$

由此可知，$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$是单位向量。另外，$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$的方向是 $\overrightarrow{MM'}$ 当 Δt 趋于零时的极限方向，即沿切线 $\overline{MT}$（图2.6）且指向 s 的正向。

用 $\boldsymbol{\tau}$ 表示切向单位向量 $d\boldsymbol{r}/ds$，于是式（2.6）就可以写成

$$\boxed{\boldsymbol{v}=\dot{s}\boldsymbol{\tau},} \qquad (2.7)$$

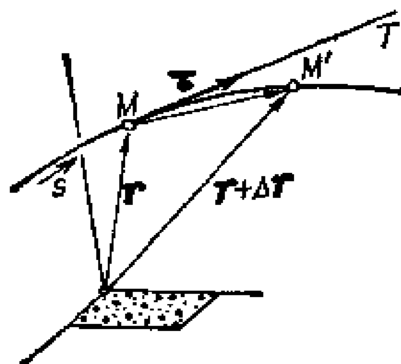


图2.6　切向单位向量

其中 $\dot{s}=\frac{ds}{dt}$ 是 $\boldsymbol{v}$ 在 $\boldsymbol{\tau}$ 方向的投影 v_τ，它可以是正的也可以是负的。当 $\dot{s}>0$ 时，表示 $\boldsymbol{v}$ 沿 $\boldsymbol{\tau}$ 的正向，速度的大小 $v=v_\tau=\dot{s}$；当 $\dot{s}<0$ 时，表示 $\boldsymbol{v}$ 沿着 $\boldsymbol{\tau}$ 的反向，$v=-v_\tau=-\dot{s}$。与(2.2)相比，$\boldsymbol{\tau}$ 正好就是速度向量 $\boldsymbol{v}$ 的单位向量。总之，速度的大小 $v=|\dot{s}|$，方向必定沿轨迹的切线，至于速度指向切线的哪一方，则由 $\dot{s}$ 的正负来确定。速度的大小也称为速率，它的量纲是［长度］［时间］$^{-1}$。长度的基本单位是米，时间的基本单位是秒，因此速度的单位可以是米/秒，厘米/秒，公里/小时等。

下面讨论点的加速度。设在时间间隔 t 到 $t+\Delta t$ 内，速度由 $\boldsymbol{v}$ 变成 $\boldsymbol{v}+\Delta\boldsymbol{v}$，$\Delta\boldsymbol{v}$ 是速度在此时间间隔内的增量（图 2.7）。我们把平均加速度 $\boldsymbol{a}_*=\Delta\boldsymbol{v}/\Delta t$ 的极限叫做**瞬时加速度**，简称**加速度**，即

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt}.$$

同样地，用点表示对时间 t 的导数符号，则有

$$\boxed{\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}}=\ddot{\boldsymbol{r}}.} \qquad (2.8)$$

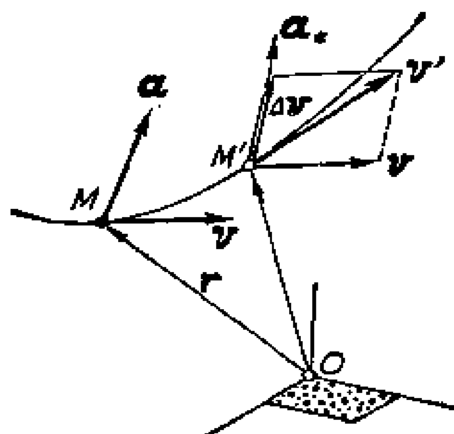


图2.7　点的加速度

和速度的定义一样，$\boldsymbol{v}$ 的微分过程刻划了速度既是 $\boldsymbol{v}$，又不是 $\boldsymbol{v}$

（而是趋向 $\boldsymbol{v}$ ）的矛盾，即说明了 $\boldsymbol{v}$ 的变化过程。

根据式(2.8)与(2.7)得到

$$\boldsymbol{a}=\ddot{s}\boldsymbol{\tau}+\dot{s}\dot{\boldsymbol{\tau}}。 \tag{2.9}$$

将式(2.9)与式(2.3)进行对比，式(2.9)中的第一项 $\ddot{s}\boldsymbol{\tau}$ 表示由于速度大小改变（把方向看成不变）而产生的加速度，后一项则是由于速度方向改变（把大小看作不变）而产生的加速度，它可以写成

$$\dot{s}\dot{\boldsymbol{\tau}}=\dot{s}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\dot{s}^2\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}=v^2\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds},$$

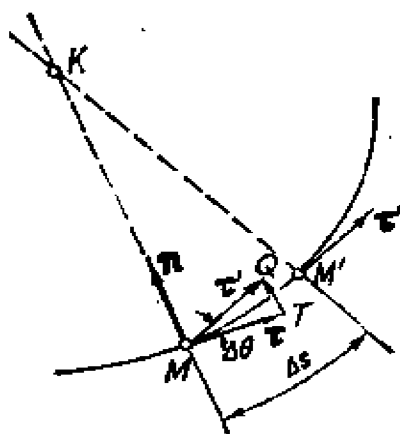


图2.8 单位法向量

其中已利用了 $v=|\dot{s}|$ 这个关系。剩下的问题是要讨论 $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$ 的大小和方向。

设 M 和 M' 处的切向单位向量分别是 $\boldsymbol{\tau}=\overrightarrow{MT}$ 和 $\boldsymbol{\tau}'$，作 $\overrightarrow{MQ}=\boldsymbol{\tau}'$（图 2.8）。夹角 $\angle TMQ=\Delta\theta$，于是

$$\Delta\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{\tau}=\overrightarrow{TQ}。$$

$$\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\boldsymbol{\tau}}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{1}{\Delta s}\cdot 2\sin\frac{\Delta\theta}{2}\right|$$

$$=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|\cdot\lim_{\Delta\theta\to 0}\left|\frac{\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|=\left|\frac{d\theta}{ds}\right|。$$

$\frac{d\theta}{ds}$ 是方向对弧长的变化率，叫做**曲率**，它的倒数 $\rho=\left|\frac{ds}{d\theta}\right|$ 叫做**曲率半径**。曲率半径是曲线弯曲程度的度量，曲率半径愈小，曲率

愈大①，曲线"弯得愈厉害"。直线是曲线的一种特殊情况，是"一点都不弯的"曲线，它的曲率半径为无穷大，曲率为零。在不至于与密度、极坐标的符号发生误会时，曲率半径用符号 ρ 表示。

再看 $d\boldsymbol{\tau}/ds$ 的方向，它是 $\overrightarrow{TQ}$ 的极限方向，显然它垂直于切向 $\boldsymbol{\tau}$，即在曲线的法平面内。另外，当 Δs 趋于零时，三角形 MTQ 所在的平面 P 在空间有一个极限位置，叫做密切平面(图2.9(a))，$d\boldsymbol{\tau}/ds$ 必定在这个平面内，密切平面与法平面的交线叫做主法线(图2.9(b))，于是 $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$ 沿主法线，指向曲线内凹的一方。如果轨迹是一条平面曲线，那么密切平面就与曲线所在平面重合，主法线也就是这个平面内的法线。

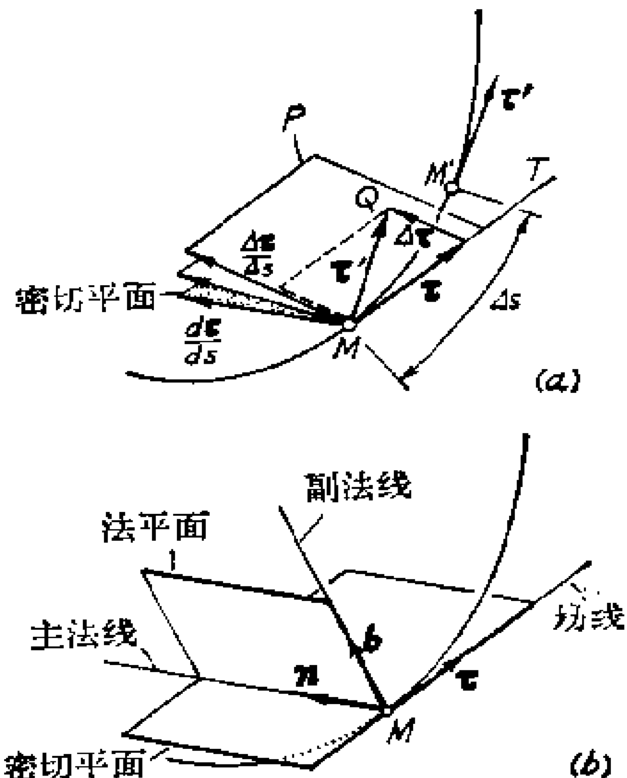


图2.9 密切平面和主法线

如果用 $\boldsymbol{n}$ 表示主法线指向轨迹内凹方向的单位向量，那么可以得到

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}=\frac{1}{\rho}\boldsymbol{n}\text{②}. \tag{2.10}$$

---

① 假设图2.8中曲线是一圆弧，M 和 M' 处的法线交于 K 点，当然 K 就是圆弧的中心，$KM=KM'=\Delta s/\Delta\theta$ 就是曲率半径。如果曲线是平面的，但不是圆弧，法线交点 K 的极限（当 M' 趋向 M）位置叫做曲率中心，KM 的极限是曲率半径。

② 当轨迹是一般空间曲线时，过 M 点及其邻近任意两点可以确定一个圆。当这两个邻近点同时趋向于 M 点时，这个圆的极限称为曲线在 M 点的密切圆，它的半径是曲线在 M 点的曲率半径。密切圆在密切平面上，并与曲线在 M 点相切。

代入式(2.9)中，最后得到加速度的表达式

$$\boxed{\boldsymbol{a}=\ddot{s}\boldsymbol{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}.} \tag{2.11}$$

由此可见，加速度有两个分量，一个是切向分量 $a_\tau=\ddot{s}=\dot{v}$，它是由于速度大小的变化产生的；另一个是法向（主法向）分量 $a_n=v^2/\rho$，它是由于速度方向的变化产生的。

我们规定，同时垂直于切向和主法向的方向叫做副法线方向。副法向单位向量记作 $\boldsymbol{b}$，有关系式 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n}$。从式(2.11)看出，加速度在副法向的分量为零。因此全加速度的大小为

$$a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\ddot{s}^2+v^4/\rho^2}=\sqrt{\dot{v}^2+v^4/\rho^2}. \tag{2.12}$$

下面举一些重要的特例，以加深对上述讨论的印象。

直线运动 点的速度只改变大小，不改变方向①。因而没有法向加速度，故加速度沿直线。可以把直线的曲率半径理解为无穷大，所以此时 $v_\tau=\dot{s}$，$a_\tau=\ddot{s}$，$a_n=0$。例如在等加速直线运动中，$s=s_0+v_0t+\frac{1}{2}a_0t^2$，其中 s_0,v_0,a_0 是常值。于是 $v_\tau=\dot{s}=v_0+a_0t$，$a_\tau=a_0$。如果上式中 $a_0=0$，则是等速直线运动。即速度的大小和方向都不改变的运动，当然它的加速度应恒等于零。

匀速曲线运动 速度只改变方向，不改变大小，于是加速度就只有法向分量，即 $\boldsymbol{a}=\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}$，指向曲线内凹的一面。

圆周运动 设轨迹是半径为 R 的圆(图2.10)，则速度和加速度公式如下，其中法向加速度也就是向心加速度（指向圆心）：

---

① $\dot{s}$ 的正负仅表示点在直线上运动的指向有变化，方向只是相反而已，这种情况我们习惯于说成方向不变。

$$
\boxed{\begin{aligned} v_\tau &= \dot{s}, \\ a_\tau &= \ddot{s}, \\ a_n &= v^2/R. \end{aligned}} \qquad (2.13)
$$

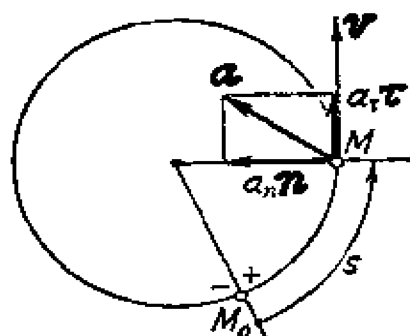


图2.10 圆周运动

当点作等速圆周运动时，切向加速度为零。

式(2.4)和(2.8)是用向量及其导数来表示点的速度和加速度的。显然，它们与采用哪一种坐标系无关。式(2.7)与(2.11)是通过运动轨迹的切向和法向单位向量来表示点的速度和加速度的，它非常明确地表达了速度与加速度的大小及方向这两个方面的固有特性，这种表示法叫做**本性法**，而式(2.7)和(2.11)叫做**本性方程**。

*** 设桥面形状为一抛物线 $y^2=-2px$(y轴竖直向上)。汽车以匀速率通过桥面。问在什么位置汽车的加速度最大？***

*** 一点作直线运动，它在某一时刻的瞬时速度和瞬时加速度等于零。这一点是否静止？***

*** 在什么情况下点的加速度在每一时刻都等于零？在什么情况下点的加速度在某一时刻等于零？有无可能点在曲线（不是直线）上运动时，在某一时刻加速度为零而速度不为零？***

*** 下列等式是否成立？

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}dt,\ dr=vdt, d\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}dt,\ dv_\tau=a_\tau dt. \quad ***$$

2-2 直角坐标描述法

公式(2.4)和(2.8)是向径、速度、加速度三者的向量关系式。在解决具体问题时，人们关心的是速度、加速度的具体大小，以及它们与某些已知方向的夹角，因此只有向量关系式还解决不了问题，必须选用合适的坐标系。最简单而又最常用的是直角坐标

系，即正交的笛卡儿坐标系。

在所考虑的参考系中选定一个直角坐标系 $Oxyz$，就是选定一个固定点 O 为坐标原点，选定坐标轴 Ox，Oy，Oz 彼此正交，且规定它们的单位值长度。或者可以用原点 O 以及沿这三根轴方向的单位向量（称为单位基向量）$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 来代表，写成 $[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$。在力学中通常取右手坐标系，即 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$。今后我们如果没有特殊说明，所用的坐标系都是右手坐标系。直角坐标系的三个基向量在参考系中是大小和方向都保持不变的常向量。例如，在地球这个参考系上，可以选取地面上某一固定点 O 作为原点，取 Ox，Oy，Oz 分别指向东，北，天（图2.11）。这样组成的坐标系叫做**东北天系**。

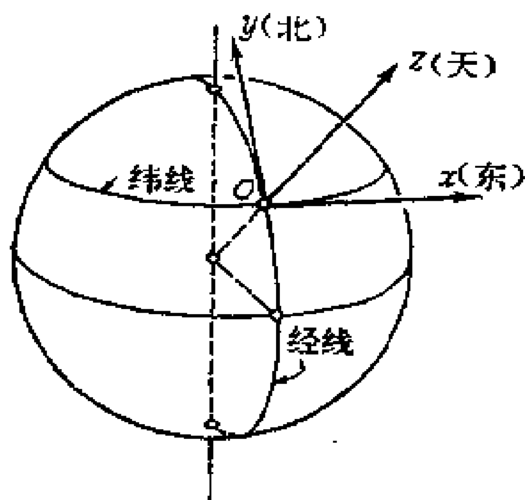


图2.11　东北天系

在直角坐标系中，向径 $\boldsymbol{r}$ 和坐标 (x,y,z) 的关系是

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}. \qquad (2.14)$$

因此，运动方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 在直角坐标系中可用方程组

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)$$

表示，称为直角坐标运动方程。把 t 看成是参数，那么这一组方程就是轨迹的参数方程。

例2.1　一架飞机向东北某方向等速水平航行（图2.12）。在东北天系中，已知它的运动方程为

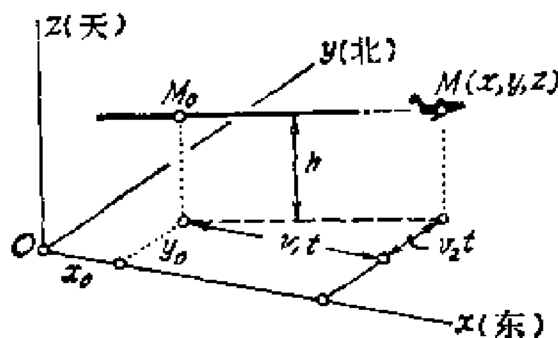


图2.12　飞机的轨迹

$$\begin{cases} x = x_0 + v_1 t, \\ y = y_0 + v_2 t, \\ z = h, \end{cases}$$

其中 x_0, y_0, h 是常量，它们表示当 $t=0$ 时飞机位置的坐标，v_1 和 v_2 也是常量，分别表示东向和北向的速度分量。求飞机的轨迹方程和弧长方程。

解 由运动方程中消去参数 t，得到

$$\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2}, \qquad z = h.$$

显然，这是在平面 $z=h$ 中的一条直线。

取 $t=0$ 时飞机的位置 $M_0(x_0, y_0, h)$ 为弧长 s 的起算点，沿 t 增大时飞机的运动方向为 s 的正方向，则有

$$s = \int_{M_0}^{M} ds = \int_{(x_0, y_0, h)}^{(x, y, h)} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

$$= \int_0^t \sqrt{v_1^2 + v_2^2}\, dt = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \cdot t,$$

这就是弧长方程。在此时刻以前 t 是负值，相应地弧长也是负值。▌

根据 $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$，对式(2.14)求一次导数，得到

$$\boldsymbol{v} = \dot{x}(t)\boldsymbol{i} + \dot{y}(t)\boldsymbol{j} + \dot{z}(t)\boldsymbol{k}. \tag{2.15}$$

这说明速度在直角坐标轴上的投影就是点的相应坐标的一次导数，即

$$\boxed{v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}.} \tag{2.16}$$

由此得到速度的大小为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

$\boldsymbol{v}$ 的方向由方向余弦给出

$$\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{i})=\frac{v_x}{v},\quad \cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{j})=\frac{v_y}{v},\quad \cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{k})=\frac{v_z}{v}.$$

将式(2.15)再求一次导数，得到加速度的表达式

$$\boldsymbol{a}=\ddot{x}(t)\boldsymbol{i}+\ddot{y}(t)\boldsymbol{j}+\ddot{z}(t)\boldsymbol{k}. \tag{2.17}$$

因而加速度 $\boldsymbol{a}$ 在坐标轴上的投影分别为

$$\boxed{a_x=\ddot{x},\quad a_y=\ddot{y},\quad a_z=\ddot{z}.} \tag{2.18}$$

由此得到加速度的大小为

$$a=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}.$$

其方向也由相应的方向余弦给出

$$\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{i})=\frac{a_x}{a},\quad \cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{j})=\frac{a_y}{a},\quad \cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{k})=\frac{a_z}{a}.$$

如果点在平面上运动，一般就把这个平面取作 Oxy 平面。由于坐标 z 恒等于零，在计算速度、加速度时就不必考虑 v_z,a_z 了，因为它们都恒等于零。

例2.2　抛射体运动　运动方程是

$$x=v_0t\cos\alpha,\quad y=v_0t\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 v_0 是初速，α 是初速的倾角，g 是重力加速度（图2.13）。分析点的运动。

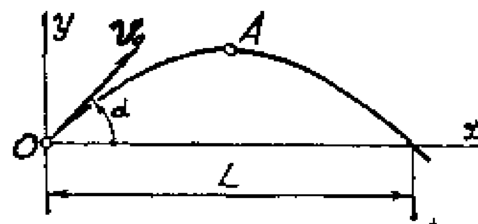


图2.13　抛射体运动

解　在运动方程中消去 t 得轨迹方程

$$y=x\,\mathrm{tg}\,\alpha-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2.$$

它可改写成

$$y-\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}=-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\left(x-\frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}\right)^2.$$

可见轨迹是抛物线，其顶点 A 的坐标是

$$x_A=\frac{v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha,\qquad y_A=\frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha.$$

现在我们分析点的速度和加速度。将 x 和 y 的表达式求导一次得

$$\dot{x}=v_0\cos\alpha,\quad \dot{y}=v_0\sin\alpha-gt.$$

当 $t=\frac{v_0}{g}\sin\alpha$时，$\dot{y}=0$。这就是抛射体到达抛物线顶点 A 的时刻，此时的速度沿水平方向，即 $\boldsymbol{v}=v_0\cos\alpha\,\boldsymbol{i}$。当 $t=\frac{2v_0}{g}\sin\alpha$ 时，$y=0$，就得到射程

$$x=L=\frac{2v_0^2}{g}\cdot\sin\alpha\cos\alpha.$$

将速度再求导一次得加速度的投影

$$\ddot{x}=0,\quad \ddot{y}=-g.$$

所以加速度为

$$\boldsymbol{a}=-g\boldsymbol{j}=\boldsymbol{g},$$

其中 $\boldsymbol{g}$ 表示重力加速度向量。▌

例2.3 梯子上一点的运动 梯子 AB 的两个端点分别沿墙和地面滑动（图2.14），它和地面的夹角 θ 是 t 的已知函数

$$\theta=\theta(t).$$

梯子上有一点 M，它到 A 和 B 点的距离分别是 a 和 b。分析 M 点的运动。

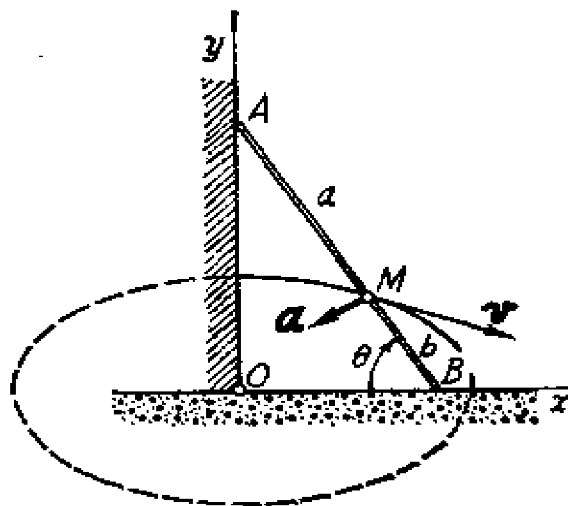


图2.14 梯子

解 取坐标系 Oxy 如图，Ox 沿地面，Oy 沿墙。则 M 点的坐标为

$$x = a\cos\theta(t), \quad y = b\sin\theta(t).$$

因为函数 $\theta(t)$ 为已知，所以上两式就是运动方程。消去参数 θ，就得到轨迹方程，它是一个椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

根据题意，梯子运动时 M 点限于第一象限，即上式要求 $x\geqslant0$，$y\geqslant0$。

点的速度投影为

$$\dot{x} = -a\dot{\theta}\sin\theta, \quad \dot{y} = b\dot{\theta}\cos\theta.$$

速度 $\boldsymbol{v} = -a\dot{\theta}\sin\theta\,\boldsymbol{i} + b\dot{\theta}\cos\theta\,\boldsymbol{j}$ 沿椭圆的切线方向。当梯子倒下时，θ 在减小，即 $\dot{\theta}<0$，则 $\boldsymbol{v}$ 的方向如图所示。

点的加速度为

$$\boldsymbol{a} = (-a\ddot{\theta}\sin\theta - a\dot{\theta}^2\cos\theta)\boldsymbol{i} + (b\ddot{\theta}\cos\theta - b\dot{\theta}^2\sin\theta)\boldsymbol{j}.$$

如果 $\dot{\theta}$ = 常值，则 $\ddot{\theta}=0$（在动力学中将看到，光滑梯子由于重力作用而滑下时，$\ddot{\theta}$ 不等于零），此时 $\boldsymbol{a} = -\dot{\theta}^2\boldsymbol{r}$，即 $\boldsymbol{a}$ 指向 O 点。在一般情况下，$\boldsymbol{a}$ 的具体方向要看 $\theta(t)$ 是什么样的函数才能确定下来。▍

例2.4　简谐运动的合成　已知点的运动方程为

$$x = a\sin\omega t, \quad y = b\sin(\omega t+\alpha).$$

这表明点在 x, y 两方向的投影都是简谐运动，且频率相同，但有相位差别。分析点的轨迹和加速度。

解　点的轨迹是频率比为 1 的利萨如(Lissajous)图(图2.15)。将 x，y 两表达式中的参数 t 消去，由 x 解得 $\sin\omega t = \dfrac{x}{a}$ 代入 y 式得

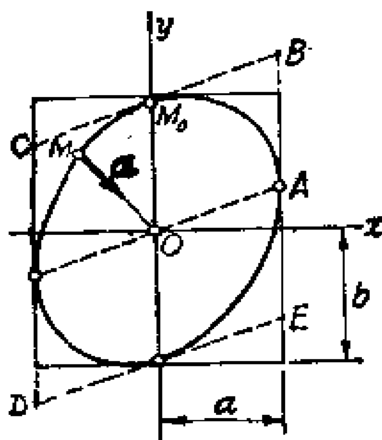


图2.15　利萨如图

$$y=(b\cos\alpha)\sin\omega t+(b\sin\alpha)\cos\omega t$$
$$=\left(\frac{b}{a}\cos\alpha\right)x+(b\sin\alpha)\cos\omega t.$$

故有

$$\cos\omega t=\frac{y}{b\sin\alpha}-\frac{\cos\alpha}{a\sin\alpha}x.$$

利用 $\sin^2\omega t+\cos^2\omega t=1$，即得轨迹方程

$$\left(\frac{y}{b\sin\alpha}-\frac{\cos\alpha}{a\sin\alpha}x\right)^2+\left(\frac{x}{a}\right)^2=1.$$

或

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b}\cos\alpha=\sin^2\alpha.$$

这是一个椭圆，它与由 $x=\pm a$，$y=\pm b$ 所框成的长方形内切(为什么?)。在 $t=0$ 时，点在 $M_0(0, b\sin\alpha)$ 处。图中 A 点的坐标是 $(a, b\cos\alpha)$。可以证明 OA 和 OM_0 是椭圆的一对共轭半径，因而椭圆又与图中平行四边形 $BCDE$ 内切。

点的加速度为

$$\boldsymbol{a}=-a\omega^2\sin\omega t\,\boldsymbol{i}-b\omega^2\sin(\omega t+\alpha)\,\boldsymbol{j}=-\omega^2\boldsymbol{r}.$$

这说明在每一时刻 $\boldsymbol{a}$ 总是指向中心 O 的。 ▌

例2.5 半径为 R 的轮子沿直线轨道无滑动地滚动(称为纯滚动)(图2.16)。设轮子保持在同一竖直平面内运动，且轮心 A 的速度为已知值 u。分析轮子边缘一点 M 的运动。

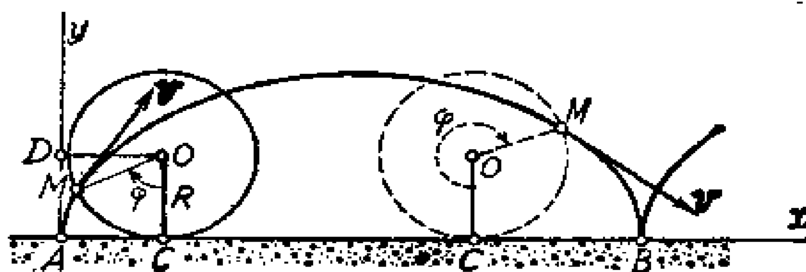


图2.16 旋轮线轨迹

解 取轮子所在的平面为 Axy 平面，它在其上滚动的直线为 x 轴，并取 M 点所在的一个最低位置(这时轮上 M 点刚好与 x

轴相接触）为原点A，如图。设在任意时刻t，轮子滚过的转角为$\angle COM=\angle\varphi$，它是t的函数，C是轮子与其轨道的接触点。因轮子滚动时没有滑动发生，故$\overline{AC}=$弧长$CM=R\varphi$。于是得出M点的运动方程为

$$x=\overline{AC}-\overline{OM}\sin\varphi,\qquad y=\overline{OC}-\overline{OM}\cos\varphi。$$

或
$$x=R(\varphi-\sin\varphi),\qquad y=R(1-\cos\varphi)。$$

这就是旋轮线的参数方程。

速度的分量分别为

$$\dot{x}=R\dot{\varphi}(1-\cos\varphi),\qquad \dot{y}=R\dot{\varphi}\sin\varphi。$$

上式中导数$\dot{\varphi}$可以这样求出：O点作直线运动，有

$$x_O=\overline{AC}=R\varphi,$$

对t求导得$\dot{x}_O=R\dot{\varphi}=u$，因而$\dot{\varphi}=u/R$。由$\dot{x}$和$\dot{y}$可求出$M$点的速度$v$的大小为

$$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=R|\dot{\varphi}|\sqrt{2(1-\cos\varphi)}$$
$$=\left|2R\dot{\varphi}\sin\frac{\varphi}{2}\right|=u\overline{MC}/R。$$

还可以推导出v的方向垂直于$\overrightarrow{CM}$。

当$\varphi=0$和2π时，M点处在最低位置，即A点和B点。此时的速度分量$\dot{x}=0$，$\dot{y}=0$。由此得到一个重要结果：轮子无滑动地滚动时，轮子上与地面接触的那个点的瞬时速度为零。

同样可以求出M点的加速度分量$\ddot{x}$和$\ddot{y}$，从而算出加速度的大小与方向。值得注意的是在A点和B点，即当M点与地面接触时它的加速度并不等于零。▌

例2.6　点沿螺旋线的匀速运动　已知点M的运动方程为

$$x=R\cos\omega t,\quad y=R\sin\omega t,\quad z=\frac{h}{2\pi}\omega t。$$

点的轨迹是一个圆柱面上的螺旋线（图2.17），圆柱半径为R，螺距为h。分析点的运动，并求螺旋线的曲率半径。

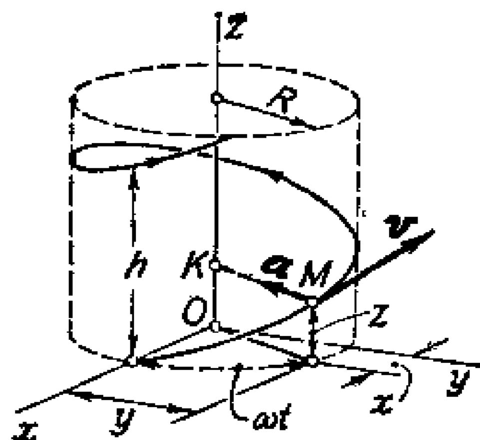


图2.17 螺旋线轨迹

解 速度大小为

$$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$$
$$=\omega\sqrt{R^2+(h/2\pi)^2}.$$

它是一个常量。速度v与z轴的夹角为$\arccos(v_z/v)$，也是常量。加速度a的投影为

$$a_x=-\omega^2 x,\quad a_y=-\omega^2 y,\quad a_z=0.$$

所以加速度a平行于Oxy平面，它的大小$a=R\omega^2$为常量，方向沿着点M至z轴的垂线MK，指向z轴。

对于螺旋线来说，由于切向单位向量τ与z轴的夹角不变，当时间t或弧长s变化时，τ的向量端图是一个水平的圆（图2.18(b)）。根据空间几何关系知道，主法线n必定在水平面内，并且与τ垂直，就是图中M到z轴的垂线MK方向。因为速度大小不变，切向加速度恒为零，因此总加速度就等于法向加速度$R\omega^2$。将算出的v和a代入式(2.13)，可求出曲率半径为

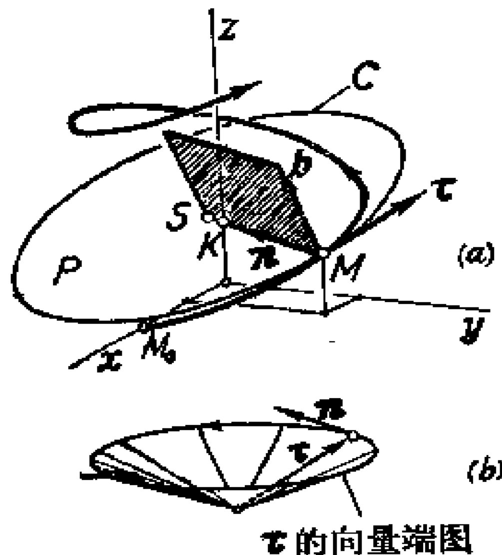


图2.18 螺旋线的几何

$$\rho=\frac{v^2}{a}=\frac{\omega^2[R^2+(h/2\pi)^2]}{R\omega^2}=R+\frac{h^2}{4\pi^2 R}>R.$$

在主法线 MK 上取 $MS=\rho$，则 S 点就是曲线在 M 处的曲率中心。以曲率中心 S 为圆心，曲率半径 ρ 为半径，在密切平面 P 上作一个圆 C，就是密切圆。在螺旋线上曲率半径处处相等，即密切圆大小都一样。图2.18(a)中还表示出副法线单位向量 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n}$。▌

下面讨论在同一个参考系中取两个不同的直角坐标系时同一点的速度与加速度的变换公式。

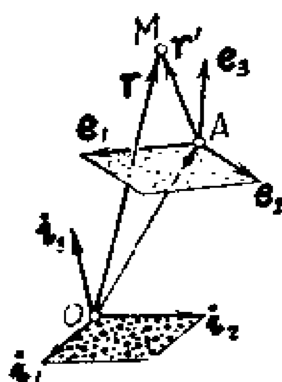


图2.19 同一点在两个坐标系中向量的关系

设一个坐标系的原点在 O，单位向量基 $\mathbf{i}$ 为 $[\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3]$。另一坐标系的原点在 A，单位向量基 $\mathbf{e}$ 为 $[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$。原点 O 和 A 在参考系中取定以后就不再改变，同样基 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{e}$ 在取定以后方向也不再改变。同一点 M 在两个坐标系中的向径分别为 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$（图2.19），它们之间的关系为

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OA}+\boldsymbol{r}' \qquad (2.19)$$

设两组基向量之间的关系（见§1.2）为

$$[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]=[\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3]\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix},$$

或简写为

$$\mathbf{e}=\mathbf{i}\mathbf{P}, \qquad (2.20)$$

其中变换矩阵 $\mathbf{P}$ 的元素为 $p_{kl}=\boldsymbol{e}_l\cdot\boldsymbol{i}_k(k,l=1,2,3)$。

设 M 点在基 $\mathbf{i}$ 中的坐标列阵为 $\mathbf{x}^i=[x_1^i,x_2^i,x_3^i]^T$。在基 $\mathbf{e}$ 中的坐标列阵为 $\mathbf{x}^e=[x_1^e,x_2^e,x_3^e]^T$。$A$ 点在基 $\mathbf{i}$ 中的坐标列阵为 $\mathbf{x}_A^i=[x_{A1}^i,x_{A2}^i,x_{A3}^i]^T$。于是用矩阵符号表示 $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{r}'$ 和 $\overrightarrow{OA}$，分别为

$$\boldsymbol{r}=\mathbf{i}\mathbf{x}^i,\quad \boldsymbol{r}'=\mathbf{e}\mathbf{x}^e,\quad \overrightarrow{OA}=\mathbf{i}\mathbf{x}_A^i.$$

将这三个关系式代入(2.19)，并利用(2.20)得到

$$\mathbf{i}\mathbf{x}^i=\mathbf{i}\mathbf{x}_A^i+\mathbf{e}\mathbf{x}^e=\mathbf{i}\mathbf{x}_A^i+\mathbf{i}\mathbf{P}\mathbf{x}^e.$$

由此得到

$$\boxed{\mathbf{x}^i = \mathbf{x}_A^i + \mathbf{P}\mathbf{x}^e.} \tag{2.21}$$

这就是用矩阵表示的同一个点在两个不同的直角坐标系中的坐标变换公式。把它写成分量式就是

$$\begin{cases} x_1^i = x_{A1}^i + p_{11}x_1^e + p_{12}x_2^e + p_{13}x_3^e, \\ x_2^i = x_{A2}^i + p_{21}x_1^e + p_{22}x_2^e + p_{23}x_3^e, \\ x_3^i = x_{A3}^i + p_{31}x_1^e + p_{32}x_2^e + p_{33}x_3^e. \end{cases}$$

再看速度分量的变换式。设 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}'$ 分别是M点在两个坐标系中表示的速度。将式(2.19)对时间 t 求导，注意到 $\overrightarrow{OA}$ 是常向量，所以$\frac{d}{dt}\overrightarrow{OA}=0$，故有

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OA} + \dot{\boldsymbol{r}}' = \boldsymbol{v}'. \tag{2.22}$$

这说明速度向量不论是在哪一个直角坐标系里都是相同的，或者说速度向量是与坐标系的选择无关的。要注意的是这里所说的速度向量指的是速度的大小、速度与参考系中某一个固定方向之间的夹角，无论你选哪一个直角坐标系，这些量都是相同，即它们是坐标变换下的不变量。至于速度在坐标轴上的分量、以及相对坐标轴方向的方向余弦显然与坐标系选择有关。

将速度写成分量形式

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \mathbf{i}\,\dot{\mathbf{x}}^i = \mathbf{i}\mathbf{v}^i,$$

$$\boldsymbol{v}' = \dot{\boldsymbol{r}}' = \mathbf{e}\,\dot{\mathbf{x}}^e = \mathbf{e}\mathbf{v}^e,$$

其中 $\mathbf{v}^i = [v_1^i, v_2^i, v_3^i]^T$ 和 $\mathbf{v}^e = [v_1^e, v_2^e, v_3^e]^T$ 分别表示速度在基 $\mathbf{i}$ 和基 $\mathbf{e}$ 中的分量(投影)，考虑到式(2.20)和式(2.22)，就得到速度在不同直角坐标系中分量的变换公式

$$\mathbf{v}^i = \mathbf{P}\mathbf{v}^e. \tag{2.23}$$

同理，如 $\boldsymbol{a} = \mathbf{i}\mathbf{a}^i$ 和 $\boldsymbol{a}' = \mathbf{e}\mathbf{a}^e$ 分别是M点的加速度在两个坐标系中的表达式。由式(2.22)求一次导数立刻得出 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$，即加

速度向量与坐标系无关。它们的分量之间的变换公式为

$$\mathbf{a}^{i}=\mathbf{P}\mathbf{a}^{e}, \tag{2.24}$$

其中 $\mathbf{a}^{i}=[a_1^i,a_2^i,a_3^i]^T$，$\mathbf{a}^{e}=[a_1^e,a_2^e,a_3^e]^T$。

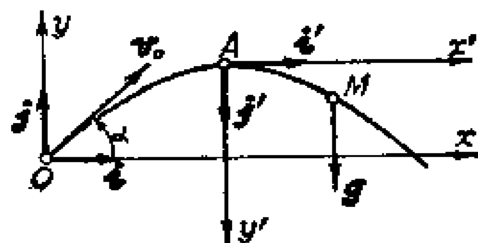


图2.20 坐标变换的例子

例2.7 重新考虑例2.2中的抛射体运动，另外取坐标系 $Ax'y'z'$ 的坐标原点 A 在轨迹的最高点，i' 水平向右，j' 竖直向下，k' 与 i' 和 j' 组成右手系，即垂直于纸面指向里面(图2.20)。求速度和加速度的表达式。

解 在目前这种情况下基 i 就是 $[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$，基 e 就是 $[\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}']$。它们之间的关系是

$$[\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}']=[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

根据(2.21)与(2.20)得到在两个坐标系之间的坐标变换关系为

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_A\\ y_A\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{bmatrix}.$$

由此很容易算出在新的坐标系中轨迹方程为

$$y'=\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x'^2.$$

由式(2.23)和(2.24)得速度为

$$v_{x'}=v_0\cos\alpha,\qquad v_{y'}=gt-v_0\sin\alpha;$$

加速度为

$$a_{x'}=0,\qquad a_{y'}=g.$$ ▌

例2.8 重新考虑例2.4中的利萨如图。为简单起见，设 $b=a$，即两振幅相同。于是椭圆轨迹的方程为

$$x^2+y^2-2xy\cos\alpha=a^2\sin^2\alpha.$$

引入新的坐标系 $Ox'y'$，它由原来的 Oxy 转过$\frac{\pi}{4}$得到(图2.21)。于是坐标变换公式为（因为 z 坐标没有变化，故略去有关 z 坐标的项）

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

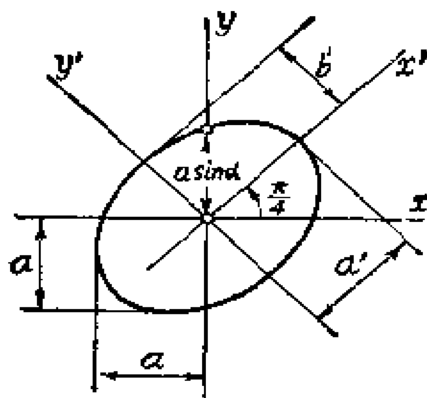


图2.21 利萨如图

在这个新坐标系中，可以得到以下结果。

运动方程为

$$x' = a'\sin\left(\omega t + \frac{\alpha}{2}\right), \quad y' = b'\cos\left(\omega t + \frac{\alpha}{2}\right),$$

其中 $a' = \sqrt{2}\,a\cos\frac{\alpha}{2}$，$b' = \sqrt{2}\,a\sin\frac{\alpha}{2}$。

轨迹方程为

$$\left(\frac{x'}{a'}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b'}\right)^2 = 1.$$

这说明 x' 和 y' 轴就是椭圆的主轴。

速度分量为

$$v_{x'} = a'\omega\cos\left(\omega t + \frac{\alpha}{2}\right), \quad v_{y'} = -b'\omega\sin\left(\omega t + \frac{\alpha}{2}\right).$$

加速度分量为

$$a_{x'} = -\omega^2 x', \qquad a_{y'} = -\omega^2 y'.$$

值得注意的是 $\boldsymbol{a}' = a_{x'}\boldsymbol{i}' + a_{y'}\boldsymbol{j}' = -\omega^2\boldsymbol{r}'$。可见例 2.4 中所得的向量关系式 $\boldsymbol{a} = -\omega^2\boldsymbol{r}$ 在坐标变换时并没有改变。 ▌

例2.9 在经度为零，纬度为零(赤道上)的地面 A 处取一东北天直角系 $[A, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$，又在某地 B 处(经度为 $\angle AOC = \varphi$，纬度为 $\angle COB = \lambda$)的地面上取一东北天直角系 $[B, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}]$ (图2.22)。设

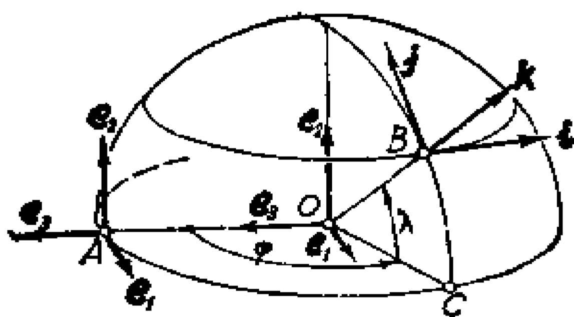


图2.22　坐标变换的例子

已在 B 处测得某飞行器的速度和加速度在 $[B,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$ 中的分量为 (v_x,v_y,v_z) 和 (a_x,a_y,a_z)。求飞行器的速度和加速度在 $[A,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ 中的分量。

解　只要算出两个坐标系之间的变换矩阵 **P**，问题就可以得到解决。这只要取几个中间的过渡坐标系，矩阵 **P** 就能比较容易地求出。

因为题目要求的是速度和加速度分量的变换关系，根据式(2.23)和(2.24)，我们知道它与坐标系原点的选取无关。因此第一步我们把 $[A,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ 保持坐标架方向不变，平行地移动成 $[O,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$，其中 O 是地心(图 2.22)。这样一个变换，因为基向量不变，所以对速度和加速度分量无影响。

第二步再取坐标系 $[O,\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3']$，坐标原点在地心不变，$\boldsymbol{e}_2'$ 保持 $\boldsymbol{e}_2$ 方向不变，$\boldsymbol{e}_1'$ 与 $\boldsymbol{e}_3'$ 分别由 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_3$ 转过角 φ 而成(图 2.23)。因此，两个向量基之间的关系为

$$[\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3']=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]\begin{bmatrix}\cos\varphi & 0 & \sin\varphi\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi\end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

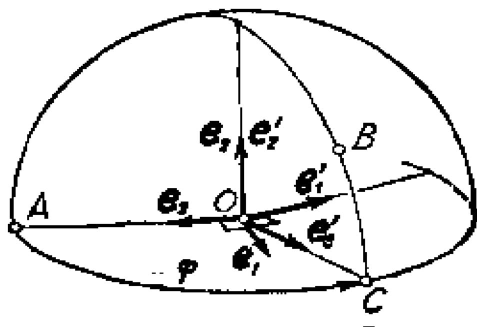


图2.23　绕 $\boldsymbol{e}_2$ 转 φ 角

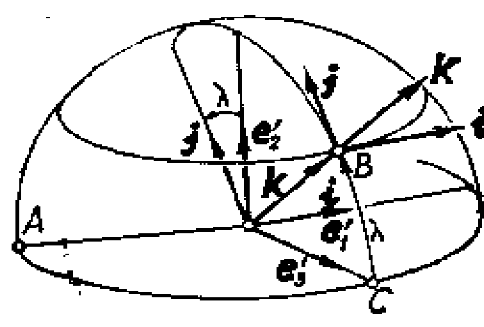


图2.24　绕 $\boldsymbol{e}_1'$ 转 $-\lambda$ 角

从图2.24不难看到，如将向量基 $[\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3]$ 保持 $\boldsymbol{e}'_1$ 不变，$\boldsymbol{e}'_3$ 和 $\boldsymbol{e}'_2$ 转过一个角度 λ，就得出向量基 $[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}]$。然后再将坐标原点由地心 O 移到地面的 B 点，便成为 B 处的东北天系。因此这两组向量基之间的关系为

$$[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}] = [\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\lambda & \sin\lambda \\ 0 & -\sin\lambda & \cos\lambda \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

将式(2.25)代入(2.26)得

$$[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}] = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]\begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\lambda & \sin\lambda \\ 0 & -\sin\lambda & \cos\lambda \end{bmatrix}.$$

或简写成

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}\mathbf{P}, \quad (2.27)$$

其中 $\mathbf{P}$ 就是坐标系 $[A, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$ 与 $[B, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}]$ 之间的变换矩阵，即

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\lambda & \sin\lambda \\ 0 & -\sin\lambda & \cos\lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi\sin\lambda & \sin\varphi\cos\lambda \\ 0 & \cos\lambda & \sin\lambda \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi\sin\lambda & \cos\varphi\cos\lambda \end{bmatrix}.$$

有了矩阵 $\mathbf{P}$ 就不难根据式(2.23)与(2.24)去求速度与加速度分量之间的变换关系。但是有一点必须提醒注意，在解决具体问题时切勿硬套公式。比如目前你必须注意到式(2.27)与式(2.20)的差别在哪里，否则就不能正确运用公式(2.23)与(2.24)。▌

*** 例2.8中如$a\neq b$，则应该怎样选取$Ox'y'$使轨迹方程简化。***

*** 分析例 2.4 及例 2.8 时，当$\alpha=0$，$\alpha=\pi/2$，$\alpha=\pi$及$\alpha=3\pi/2$等特殊情况时运动的特点(相同与相异之处)。***

2-3 极坐标和柱坐标描述法

如果点的运动是平面运动，则除了平面直角坐标以外，还可以采用平面极坐标描述法。在极坐标中，点M的位置由两个独立变量ρ和φ表示。点M的运动将由运动方程$\rho=\rho(t)$，$\varphi=\varphi(t)$描述，称为极坐标运动方程。在径向取单位向量$\boldsymbol{\rho}^0$（图 2.25），那么向径 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$可写成

$$\boldsymbol{r}=\rho\boldsymbol{\rho}^0 \text{①}。\tag{2.28}$$

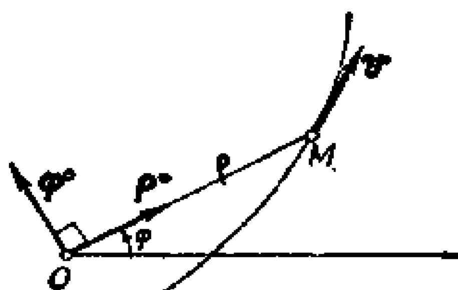


图2.25 极坐标

现将$\boldsymbol{\rho}^0$顺着φ增加的方向转过90°，得到横向单位向量$\boldsymbol{\varphi}^0$。如同在平面直角坐标系中取$[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}]$为向量基那样，我们现在取$[\boldsymbol{\rho}^0,\boldsymbol{\varphi}^0]$为向量基，并将速度与加速度向量在这两个基向量方向上分解。向量基$[\boldsymbol{\rho}^0,\boldsymbol{\varphi}^0]$也是单位正交基，但是与直角坐标系向量基$[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}]$有一个根本的不同处，就是$[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}]$在参考系中始终保持方向不变，而$[\boldsymbol{\rho}^0,\boldsymbol{\varphi}^0]$的方向随着点的运动“走到那里，变到那里”。我们就是要以这个变动的向量基作为基准去分解速度与加速度，这种方法是理论力学中的一种基本技巧，必须透彻地掌握它。至于它的好处，在掌握以后将会不言自明。

① 式(2.28)中的ρ和$\boldsymbol{\rho}^0$实际上就是式(2.5)中的r和$\boldsymbol{r}^0$，因为通常用符号ρ表示极坐标，我们将遵照惯例。

因为 $\boldsymbol{\rho}^0$ 和 $\boldsymbol{\varphi}^0$ 不是常向量，所以它们对时间 t 的导数不等于零。我们考虑$d\boldsymbol{\rho}^0/dt$和 $d\boldsymbol{\varphi}^0/dt$。根据单位向量的导数与其自身垂直的性质，可知$d\boldsymbol{\rho}^0/dt$与$\boldsymbol{\varphi}^0$平行，共方向可能相同或相反。利用图2.26中的几何关系可以算出

$$\left|\frac{d\boldsymbol{\rho}^0}{dt}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta \boldsymbol{\rho}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t}\right|$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right| = |\dot{\varphi}|。$$

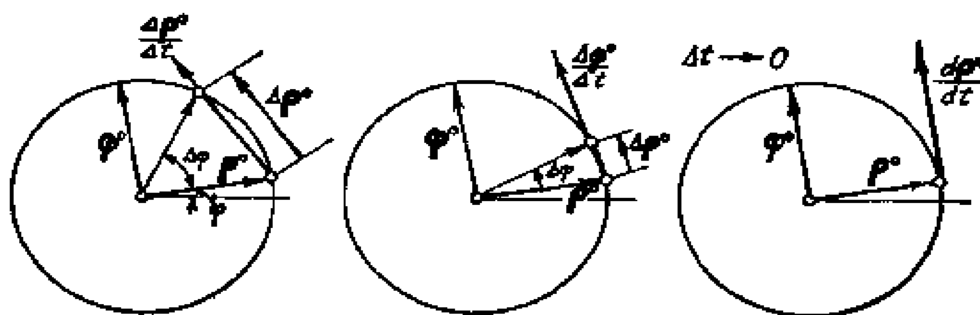


图2.26　当 $\Delta t\to 0$ 时 $\frac{\Delta \rho^0}{\Delta t}$ 的极限

注意，$d\boldsymbol{\rho}^0/dt$ 与 $\boldsymbol{\varphi}^0$的指向相同与否将决定于 $\dot{\varphi}>0$或$\dot{\varphi}<0$，所以最后得出 $d\boldsymbol{\rho}^0/dt=\dot{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^0$。

设$\boldsymbol{k}$是垂直于平面的单位向量，则 $\boldsymbol{\varphi}^0=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\rho}^0$。将这个式子对 t 求导，因$\boldsymbol{k}$在空间方向不变，故有 $d\boldsymbol{k}/dt=0$，可得

$$\frac{d\boldsymbol{\varphi}^0}{dt}=\boldsymbol{k}\times\left(\frac{d\boldsymbol{\rho}^0}{dt}\right)=\boldsymbol{k}\times(\dot{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^0)=-\dot{\varphi}\boldsymbol{\rho}^0。$$

所以，极坐标中单位基向量的导数公式是

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{\rho}^0}{dt}=\dot{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^0,\qquad \frac{d\boldsymbol{\varphi}^0}{dt}=-\dot{\varphi}\boldsymbol{\rho}^0。} \tag{2.29}$$

将式(2.28)对 t 求一阶和二阶导数，并将式(2.29)代入，便

得出速度向量在极坐标系中的表达式为

$$\boldsymbol{v}=\dot{\rho}\boldsymbol{\rho}^0+\rho\dot{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^0, \tag{2.30}$$

加速度向量的表达式为

$$\boldsymbol{a}=(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{\rho}^0+(\rho\ddot{\varphi}+2\dot{\rho}\dot{\varphi})\boldsymbol{\varphi}^0. \tag{2.31}$$

式(2.30)表明，在极坐标向量基$[\boldsymbol{\rho}^0,\boldsymbol{\varphi}^0]$中，速度的径向分量为$v_\rho=\dot{\rho}$，横向分量为$v_\varphi=\rho\dot{\varphi}$。

式(2.31)表明，加速度的径向分量为 $a_\rho=\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2$，横向分量为$a_\varphi=\rho\ddot{\varphi}+2\dot{\rho}\dot{\varphi}=\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi})$。

* * *　利用极坐标中弧长表示式和切线与向径夹角公式导出v_ρ和v_φ。* * *

* * *　比较径向和法向、横向和切向之间的差别，指出在什么情况下它们之间的方向是一致的？ * * *

例2.10　有一根杆OA，一端O固定，在平面内匀速转动(图2.27)，它与固定方向的夹角为$\varphi=\omega t$。杆上有一小环M，沿杆(相对于杆) 自O点匀速地运动，即$\rho=OM=ut$。ω和u都是常量。求M点的轨迹和加速度。

解　M点的极坐标运动方程为$\rho=ut$，$\varphi=\omega t$。从中消去t便得轨迹方程

$$\rho=\frac{u}{\omega}\varphi.$$

它是阿几米德螺线方程。

利用式(2.31)可以直接算出加速度向量为

$$\boldsymbol{a}=-(u\omega^2t)\boldsymbol{\rho}^0+(2u\omega)\boldsymbol{\varphi}^0.$$

因此加速度的大小为

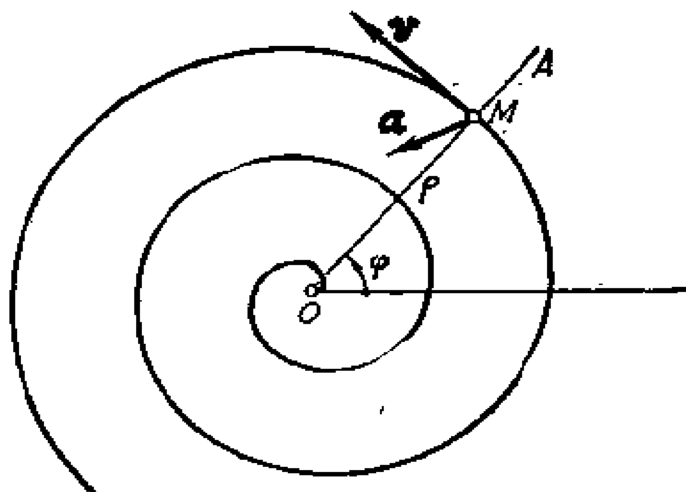


图2.27 轨迹是阿几米德螺线

$$a = u\omega\sqrt{4+\omega^2 t^2}.$$

加速度与水平线的夹角为

$$\alpha = \omega t + \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{2u\omega}{u\omega^2 t}\right) = \omega t + \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{2}{\omega t}\right).$$

值得注意的是，尽管旋转是匀速的，点沿杆的运动也是匀速的，但是点的加速度并不简单，它的大小和方向都在不断地改变。 ▌

例2.11 已知一点沿椭圆轨道运动，其极坐标方程为

$$\rho = \frac{p}{(1+e\cos\varphi)},$$

其中 e 是离心率 $(0\leqslant e<1)$，$p>0$是焦点参数；且在运动过程中保持有 $\rho^2\dot{\varphi}=c$，c 为常量。求证点的加速度大小与ρ^2成反比，加速度向量始终指向极坐标原点（图2.28）。

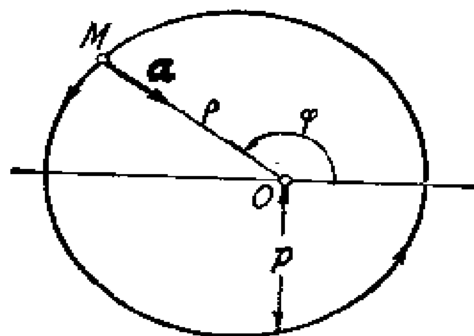


图2.28 点沿椭圆轨道运动的加速度

解 将加速度的横向分量写为

$$a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}).$$

将条件 $\rho^2\dot{\varphi}=c$ 代入便知有 $a_\varphi=0$。于是 $\boldsymbol{a}=a_\rho\boldsymbol{\rho}^0$，即 $\boldsymbol{a}$ 总是沿向径方向，其指向将由 a_ρ 的正负号决定。

由运动轨道方程得

$$\frac{p}{\rho}=1+e\cos\varphi.$$

将此式对 t 求一次导数，得

$$-\frac{p}{\rho^2}\dot{\rho}=-e\dot{\varphi}\sin\varphi.$$

将条件 $\rho^2\dot{\varphi}=c$ 代入右端得

$$\dot{\rho}=\frac{ce}{p}\sin\varphi.$$

再对 t 求一次导数，并再次利用条件 $\rho^2\dot{\varphi}=c$，得

$$\ddot{\rho}=\frac{ce}{p}\dot{\varphi}\cos\varphi=\frac{c^2e}{p}\cdot\frac{1}{\rho^2}\cos\varphi.$$

加速度径向分量可写为

$$a_\rho=\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2=\ddot{\rho}-\frac{1}{\rho^3}(\rho^2\dot{\varphi})^2=\ddot{\rho}-\frac{c^2}{\rho^3}.$$

将上式代入，并作整理后可得

$$a_\rho=-\frac{c^2}{\rho^2}\left[\frac{1}{\rho}-\frac{e\cos\varphi}{p}\right]=-\frac{c^2}{p}\frac{1}{\rho^2}.$$

于是便有 $\boldsymbol{a}=-\frac{c^2}{p}\cdot\frac{1}{\rho^2}\boldsymbol{\rho}^0$。由此可见，加速度向量指向原点，其大小与向径长度平方成反比。▎

这个例子部分地说明了怎样由开普勒的行星运动定律导出牛顿万有引力定律。开普勒的前两个定律(1609年)是：(1)所有行

星都是沿椭圆形轨道绕太阳运动，而太阳位于椭圆的一个焦点上；（2）由太阳到行星的向径所扫过的面积与时间成正比。如果把坐标原点取在太阳上，那么$\rho=p/(1+e\cos\varphi)$代表了行星的轨道。在时间间隔Δt内，向径扫过的面积（图2.29中有斜线部分的面积）为

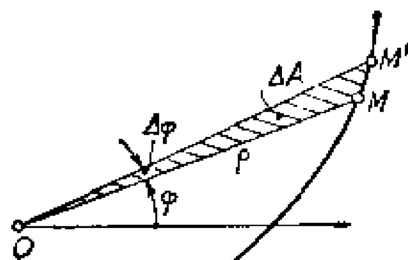


图2.29　面积速度

$$\Delta A=\frac{1}{2}\rho(\rho+\Delta\rho)\sin\Delta\varphi\approx\frac{1}{2}\rho^2\Delta\varphi.$$

这个面积随时间的变化率为

$$\frac{dA}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t}=\frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}.$$

dA/dt称为面积速度。可见例2.11中的常量c就是两倍的面积速度。所以例2.11中所假定的条件即为面积速度是常量，而开普勒第二定律所说的内容实质上就是面积速度为常量。

开普勒的第三定律（1619年）是行星沿轨道运动的周期平方与椭圆半长轴的立方成比例。由这一定律并利用例2.11的结果（这结果是对同一行星的不同时刻说的）可证明不同行星的加速度与它到太阳的距离平方成反比。如果再加上牛顿第二定律，就可以得出牛顿万有引力定律。

如果点的运动是空间运动，则由平面极坐标可以很容易地推广到空间的柱坐标。空间点的位置可由三个独立变量(ρ,φ,z)表示。例如，为了确定飞机M的位置（图2.30(a)），ρ是由雷达站O到M在水平面Oxy上投影M'的距离，φ是方位角（0°代表东向，90°代表北向），z是高度。点M的柱坐标(ρ,φ,z)与同一点相应的直角坐标(x,y,z)之间的关系是

$$x=\rho\cos\varphi,\qquad y=\rho\sin\varphi,\qquad z=z. \tag{2.32}$$

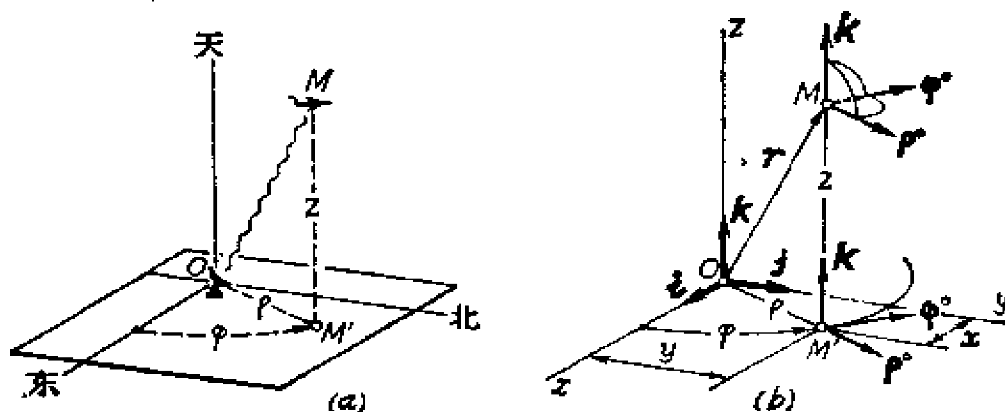


图2.30 柱坐标

如果取 $\boldsymbol{\rho}^0$ 和 $\boldsymbol{\varphi}^0$ 为 Oxy 平面上的径向和横向单位向量，取 $\boldsymbol{k}$ 为 z 向的单位向量（图2.30(b)），那么 $\boldsymbol{\rho}^0$，$\boldsymbol{\varphi}^0$ 保持平行于 Oxy 平面，而 $\boldsymbol{k}$ 垂直于 Oxy 平面且保持方向不变，因而在平面极坐标中已经讨论过的关于 $\boldsymbol{\rho}^0$，$\boldsymbol{\varphi}^0$ 的导数的结果仍然成立。即在柱坐标中，如果点的运动方程是

$$\rho=\rho(t), \quad \varphi=\varphi(t), \quad z=z(t),$$

则该点的向径可以表示为

$$\boldsymbol{r}=\rho\boldsymbol{\rho}^0+z\boldsymbol{k},$$

那么速度与加速度的公式与平面极坐标中不同的地方就只是多了 $\boldsymbol{k}$ 方向的一项，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=v_\rho\boldsymbol{\rho}^0+v_\varphi\boldsymbol{\varphi}^0+v_z\boldsymbol{k}\\&=\dot{\rho}\boldsymbol{\rho}^0+\rho\dot{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^0+\dot{z}\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{2.33}$$

以及

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=a_\rho\boldsymbol{\rho}^0+a_\varphi\boldsymbol{\varphi}^0+a_z\boldsymbol{k}\\&=(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{\rho}^0+(\rho\ddot{\varphi}+2\dot{\rho}\dot{\varphi})\boldsymbol{\varphi}^0+\ddot{z}\boldsymbol{k}.\end{aligned} \tag{2.34}$$

例2.12 用柱坐标重新计算上节例2.6（图2.17）中，沿螺旋线作匀速率运动时点的速度与加速度的大小。

解 点的柱坐标运动方程为

$$\rho=R\,(\text{常量}),\quad \varphi=\omega t,\quad z=\frac{h}{2\pi}\omega t.$$

根据式(2.33)得到速度分量为

$$v_\rho=0,\quad v_\varphi=R\omega,\quad v_z=\frac{h\omega}{2\pi}.$$

所以有 $v=\omega\sqrt{R^2+(h/2\pi)^2}$.

根据式(2.34)得到加速度分量为

$$a_\rho=-R\omega^2,\quad a_\varphi=0,\quad a_z=0.$$

所以有 $a=R\omega^2$. ▌

公式(2.30)和(2.31)，以及(2.33)与(2.34)也可以通过坐标变换的方法推演出来。下面利用矩阵的写法进行推导。根据图2.30(b)的几何关系不难看出，柱坐标向量基 $[\boldsymbol{\rho}^0,\boldsymbol{\varphi}^0,\boldsymbol{k}]$ 与直角坐标向量基 $[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$ 之间的关系为

$$\begin{cases}\boldsymbol{\rho}^0=\cos\varphi\,\boldsymbol{i}+\sin\varphi\,\boldsymbol{j},\\ \boldsymbol{\varphi}^0=-\sin\varphi\,\boldsymbol{i}+\cos\varphi\,\boldsymbol{j},\\ \boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}.\end{cases}$$

或者写成矩阵形式

$$[\boldsymbol{\rho}^0,\boldsymbol{\varphi}^0,\boldsymbol{k}]=[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

为了书写简单起见，令

$$\mathbf{e}=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]=[\boldsymbol{\rho}^0,\boldsymbol{\varphi}^0,\boldsymbol{k}],\quad \mathbf{i}=[\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3]=[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}],$$

及

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{2.35}$$

则有关系式

$$\mathbf{e}=\mathbf{i}\,\mathbf{P}. \tag{2.36}$$

值得注意的是，式(2.36)与以前的式(2.20)虽然在形式上完全一

样，但它们所包含的内容却有重大的差别。因为现在的柱坐标向量基 $\mathbf{e}$ 是随着点的运动而变化的，而直角坐标向量基 $\mathbf{i}$ 是常向量基，反映在变换关系式中，变换矩阵 $\mathbf{P}$ 是随着点的运动而变化的。具体地说，从式(2.35)可看出矩阵 $\mathbf{P}$ 的元素是变量 φ 的函数，而 φ 又是时间 t 的函数，所以归根到底变换矩阵 $\mathbf{P}$ 是时间 t 的函数，即 $\mathbf{P}=\mathbf{P}(t)$ ①。在式(2.20)中，变换矩阵 $\mathbf{P}$ 表示常向量基到另一个常向量基之间的变换关系，$\mathbf{P}$ 的每一个元素都是常量。

从常向量基到常向量基的坐标变换，以前我们在解析几何中已学过，并在 2-2 中又作了重新叙述。从常向量基到变向量基的变换是这种"常到常"的坐标变换思想的重要推广，在理论力学中有很广泛的应用，今后还要多次逐步深入地给予介绍。

由于$[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$都是常向量，它的导数全为零，而 $[\boldsymbol{\rho}^0,\boldsymbol{\varphi}^0,\boldsymbol{k}]$ 的导数就不全为零。根据向量求导法则可得出

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\rho}}^0=-\dot{\varphi}\sin\varphi\,\boldsymbol{i}+\dot{\varphi}\cos\varphi\,\boldsymbol{j},\\ \dot{\boldsymbol{\varphi}}^0=-\dot{\varphi}\cos\varphi\,\boldsymbol{i}-\dot{\varphi}\sin\varphi\,\boldsymbol{j},\\ \dot{\boldsymbol{k}}=0.\end{cases}$$

写成矩阵形式就是

$$[\dot{\boldsymbol{\rho}}^0,\dot{\boldsymbol{\varphi}}^0,\dot{\boldsymbol{k}}]=[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]\begin{bmatrix}-\dot{\varphi}\sin\varphi & -\dot{\varphi}\cos\varphi & 0\\ \dot{\varphi}\cos\varphi & -\dot{\varphi}\sin\varphi & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

或写成

$$\dot{\mathbf{e}}=\mathbf{i}\dot{\mathbf{P}},\qquad(2.37)$$

其中 $\dot{\mathbf{P}}$ 是一个矩阵，它的每个元素由变换矩阵 $\mathbf{P}$ 的相应元素对 t 求导得出。

由式(2.36)可得

① 一般说来，一个矩阵是时间 t 的函数，即指它的每个元素是时间 t 的函数，即 $p_{ij}=p_{ij}(t)$。

$$\dot{\mathbf{i}}=\mathbf{e}\dot{\mathbf{P}}^{-1}.$$

由于 P 是正交矩阵，即 $\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{P}^{T}$，所以有

$$\dot{\mathbf{i}}=\mathbf{e}\dot{\mathbf{P}}^{T},\tag{2.38}$$

其中 $\mathbf{P}^{T}$ 是 P 的转置矩阵。

将式(2.38)代入式(2.37)得

$$\dot{\mathbf{e}}=\mathbf{e}\,\mathbf{P}^{T}\dot{\mathbf{P}}.\tag{2.39}$$

这个式子的展式是

$$[\dot{\boldsymbol{\rho}}^{0},\dot{\boldsymbol{\varphi}}^{0},\dot{\boldsymbol{k}}]$$

$$=[\boldsymbol{\rho}^{0},\boldsymbol{\varphi}^{0},\boldsymbol{k}]\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix}-\dot{\varphi}\sin\varphi & -\dot{\varphi}\cos\varphi & 0\\ \dot{\varphi}\cos\varphi & -\dot{\varphi}\sin\varphi & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=[\boldsymbol{\rho}^{0},\boldsymbol{\varphi}^{0},\boldsymbol{k}]\begin{bmatrix}0 & -\dot{\varphi} & 0\\ \dot{\varphi} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

此关系式与前面得到的式(2.29)相当。利用这结果，我们可以推导出速度和加速度公式。

向径 $\boldsymbol{r}$ 写成矩阵表达式为

$$\boldsymbol{r}=\rho\boldsymbol{\rho}^{0}+z\boldsymbol{k}=[\boldsymbol{\rho}^{0},\boldsymbol{\varphi}^{0},\boldsymbol{k}]\begin{bmatrix}\rho\\ 0\\ z\end{bmatrix}.$$

对 t 求一次导数，得出速度的矩阵表达式为

$$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}=[\boldsymbol{\rho}^0,\boldsymbol{\varphi}^0,\boldsymbol{k}]\begin{bmatrix}\dot{\rho}\\0\\\dot{z}\end{bmatrix}+[\dot{\boldsymbol{\rho}}^0,\dot{\boldsymbol{\varphi}}^0,\dot{\boldsymbol{k}}]\begin{bmatrix}\rho\\0\\z\end{bmatrix}$$

$$=[\boldsymbol{\rho}^0,\boldsymbol{\varphi}^0,\boldsymbol{k}]\begin{bmatrix}\dot{\rho}\\0\\\dot{z}\end{bmatrix}+[\boldsymbol{\rho}^0,\boldsymbol{\varphi}^0,\boldsymbol{k}]\begin{bmatrix}0&-\dot{\varphi}&0\\\dot{\varphi}&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\rho\\0\\z\end{bmatrix}$$

$$=[\boldsymbol{\rho}^0,\boldsymbol{\varphi}^0,\boldsymbol{k}]\begin{bmatrix}\dot{\rho}\\\rho\dot{\varphi}\\\dot{z}\end{bmatrix}.$$

这结果与式(2.33)相当。再对 t 求一次导数，得出加速度的矩阵表达式为

$$\boldsymbol{a}=[\boldsymbol{\rho}^0,\boldsymbol{\varphi}^0,\boldsymbol{k}]\begin{bmatrix}\ddot{\rho}\\\rho\ddot{\varphi}+\dot{\rho}\;\dot{\varphi}\\\ddot{z}\end{bmatrix}$$

$$+[\boldsymbol{\rho}^0,\boldsymbol{\varphi}^0,\boldsymbol{k}]\begin{bmatrix}0&-\dot{\varphi}&0\\\dot{\varphi}&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\rho}\\\rho\dot{\varphi}\\\dot{z}\end{bmatrix}$$

$$=[\boldsymbol{\rho}^0,\boldsymbol{\varphi}^0,\boldsymbol{k}]\begin{bmatrix}\ddot{\rho}-\rho\,\dot{\varphi}^2\\\rho\,\ddot{\varphi}+2\,\dot{\rho}\,\dot{\varphi}\\\ddot{z}\end{bmatrix}.$$

这结果与式(2.34)相当。

在以上的推导中，关键的步骤是反复两次利用柱坐标基与不变的直角坐标基之间的变换关系式(2.36)，即 $\mathbf{e}=\mathbf{i}\mathbf{P}$，以及基的导数式(2.39)，即 $\dot{\mathbf{e}}=\mathbf{e}\mathbf{P}^T\dot{\mathbf{P}}$，其余都是常规的运算。下面我们将把这种方法推广到一般的曲线坐标。在曲线坐标中的关系式建立起来以后，我们发现柱坐标只是其中的一个特例而已。

2-4　曲线坐标、球坐标描述法

在直角坐标中点的位置由三个独立变量(x,y,z)来描述，在柱坐标中则由另外三个独立变量(ρ,φ,z)来描述。一般地说，空间一点可由三个独立变量(q_1,q_2,q_3)来描述，称为点的**曲线坐标**，那么点的向径 $\boldsymbol{r}$ 就是曲线坐标的向量函数，即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(q_1,q_2,q_3)。\tag{2.40}$$

为方便起见，我们把一个点在直角坐标系中的三个坐标(x,y,z)写成(x_1,x_2,x_3)，它们与曲线坐标之间的关系可用三个数量函数表示：

$$\begin{cases} x_1=x_1(q_1,q_2,q_3), \\ x_2=x_2(q_1,q_2,q_3), \\ x_3=x_3(q_1,q_2,q_3)。\end{cases}\tag{2.41}$$

相应的雅可比矩阵是

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial q_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial q_2} & \dfrac{\partial x_1}{\partial q_3} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial q_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial q_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial q_3} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial q_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial q_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial q_3} \end{bmatrix}\tag{2.42}$$

简写为

$$\mathbf{P}=[p_{ij}],\quad p_{ij}=\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\ (i,j=1,2,3)。$$

为了使 x_1,x_2,x_3 之间没有函数相关性，即为了使(q_1,q_2,q_3)的集合

仍是一个三维的空间，P 的行列式，即雅可比行列式应该不等于零[①]

$$\det \mathbf{P} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial q_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial q_2} & \dfrac{\partial x_1}{\partial q_3} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial q_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial q_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial q_3} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial q_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial q_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial q_3} \end{vmatrix} \neq 0。$$

我们今后将假设，对所选的曲线坐标这个条件一定满足。这样就在(x_1, x_2, x_3)与(q_1, q_2, q_3)之间建立起一一对应的关系（个别奇点另外考虑）。此时存在式(2.41)的反函数

$$\begin{cases} q_1 = q_1(x_1, x_2, x_3), \\ q_2 = q_2(x_1, x_2, x_3), \\ q_3 = q_3(x_1, x_2, x_3)。 \end{cases} \tag{2.43}$$

由空间解析几何知道，方程$q_1(x_1, x_2, x_3)=$常量，表示(x_1, x_2, x_3)空间即(x, y, z)空间中的一个曲面，叫做**坐标曲面**。当这个常数取不同值时，就得到一族坐标曲面，布满整个空间。同理，$q_2=$常量，$q_3=$常量是另外两族坐标曲面。对于空间任意一点$M(x_{10}, x_{20}, x_{30})$，总有三个坐标曲面（分别属于不同的族）在此相交，它们的方程是

$$\begin{cases} q_1(x_1, x_2, x_3) = q_1(x_{10}, x_{20}, x_{30}), \\ q_2(x_1, x_2, x_3) = q_2(x_{10}, x_{20}, x_{30}), \\ q_3(x_1, x_2, x_3) = q_3(x_{10}, x_{20}, x_{30})。 \end{cases}$$

任意两个属于不同族的坐标曲面有一条交线，称为**坐标曲线**，记为$[q_i]$ $(i=1, 2, 3)$，它们分别是：

$[q_1]$坐标曲线为坐标曲面$q_2=$常量和$q_3=$常量的交线；

$[q_2]$坐标曲线为坐标曲面$q_3=$常量和$q_1=$常量的交线；

$[q_3]$坐标曲线为坐标曲面$q_1=$常量和$q_2=$常量的交线。

---

① 严格地说，应该是在(q_1, q_2, q_3)空间中某一点的邻域内雅可比行列式不为零，整个空间中可能有有限个奇点，这将另行处理。

当取不同的常量时，就有三族坐标曲线，它们布满了整个空间。经过空间中任意一点，总有三根不同族的坐标曲线在此相交（图2.31）。

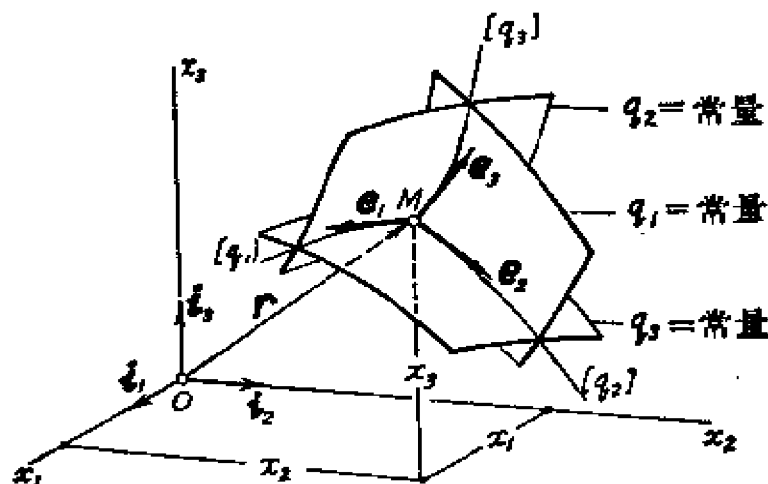


图2.31　坐标曲面和坐标曲面线$[q_1]$,$[q_2]$,$[q_3]$

我们取一组向量基$[e_1,e_2,e_3]$，其定义为

$$e_1=\frac{\partial r}{\partial q_1},\qquad e_2=\frac{\partial r}{\partial q_2},\qquad e_3=\frac{\partial r}{\partial q_3}.$$

$\frac{\partial r}{\partial q_1}$是向量函数$r$对$q_1$的偏导数，它表示在保持$q_2$和$q_3$不变而只改变$q_1$的情况下，取$\frac{\Delta r}{\Delta q_1}$的极限（当$\Delta q_1\to 0$时）。从几何上看，保持$q_2$和$q_3$为常量就意味着沿坐标曲线$[q_1]$考虑问题。当$q_1$改变时，$r$的向量端点就在空间画出$[q_1]$坐标曲线，而$e_1=\frac{\partial r}{\partial q_1}$是沿着此曲线切线方向的向量（不一定是单位向量）。类似地，$e_2=\frac{\partial r}{\partial q_2}$和$e_3=\frac{\partial r}{\partial q_3}$也有相同的性质。

例2.13　柱坐标(ρ,φ,z)也是一种曲线坐标，试分析它的坐标曲面、坐标曲线和基向量

$$\frac{\partial r}{\partial \rho},\qquad \frac{\partial r}{\partial \varphi}\quad 和\quad \frac{\partial r}{\partial z}.$$

解 柱坐标中所取的曲线坐标是 $(q_1,q_2,q_3)=(\rho,\varphi,z)$，它与直角坐标之间的关系是

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad z=z.$$

根据式(2.42)求出它的雅可比矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

只要 ρ 不为零①，就有 $\det\mathbf{P}=\rho\neq0$，因此存在反函数

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\quad \varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},\quad z=z.$$

三族坐标曲面分别是：

(1) $\rho=$常量，即 $\sqrt{x^2+y^2}=$常量，这是以 z 轴为中心线的圆柱面(图2.32)。

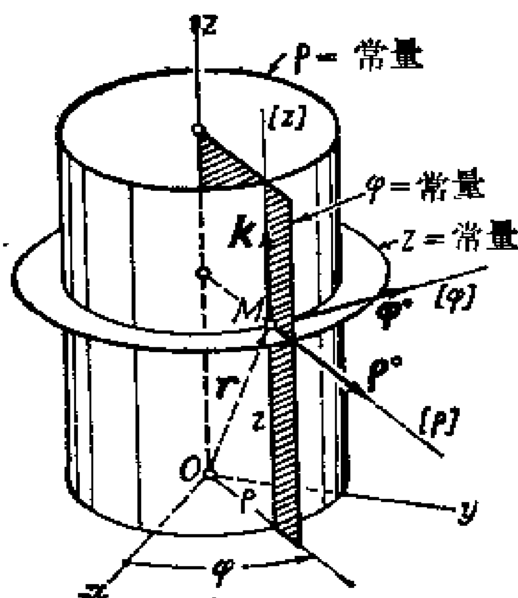


图2.32 柱坐标中的坐标曲面和坐标曲线

(2) $\varphi=$常量，即 $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}=$常量，这是包含 z 轴的垂直于 Oxy 平面的半平面。

(3) $z=$常量，很明显，这是与 Oxy 平面平行的平面（后两种坐标曲面的情况比较特殊，它们是平面，当然平面也可以看成是一种特殊的曲面）。

三族坐标曲线分别是：

(1) $[\rho]$坐标曲线，就是坐标曲面 $\varphi=$常量与 $z=$常量的交线。这是一族与 z 轴相交且垂直的放射形的直线。

(2) $[\varphi]$坐标曲线，就是坐标

① $\rho=0$ 是一个奇点，需另作专门的处理，目前可以不加考虑。

曲面 ρ=常量与 z=常量的交线。这是一族中心在 z 轴上的水平圆周（假定 z 是竖直轴）。

(3) $[z]$坐标曲线，就是坐标曲面 ρ=常量与 φ=常量的交线。这是一族平行于 z 轴的直线。

(1)和(3)实际上是直线，应作为曲线的特殊情况看待。

每一条坐标曲线都是在一定条件下由向量 $\boldsymbol{r}$ 的端点画出来的。比如$[\varphi]$坐标曲线，就是保持 ρ=常量，即限制 $\boldsymbol{r}$ 的端点必须在某一圆柱面上，同时保持 z=常量，即限制 $\boldsymbol{r}$ 的端点必须同时在某一水平面上，然后改变 φ 时 $\boldsymbol{r}$ 的向量端点画出的轨迹，显然它是一个水平的圆周。

至于基向量 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho}$ 和 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}$ 的方向应是沿着$[\rho]$坐标曲线和$[z]$坐标曲线的切线，但因它们本身是直线，所以切线就是它们的自身（图2.33）。基向量$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}$则是沿着$[\varphi]$坐标曲线的切线方向。

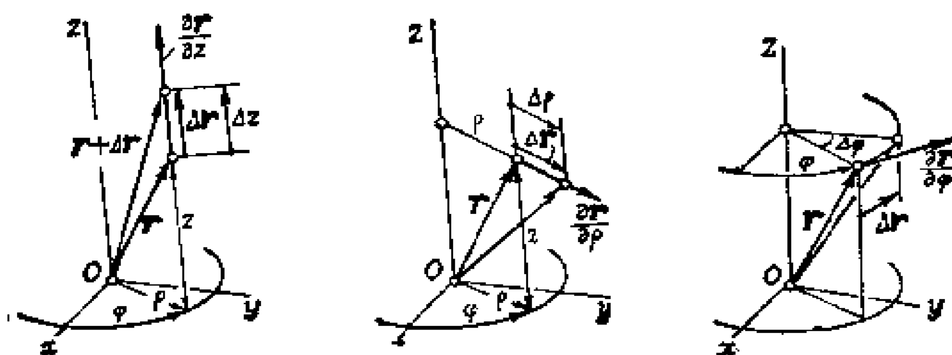


图2.33 基向量$\frac{\partial r}{\partial z}$，$\frac{\partial r}{\partial \rho}$和$\frac{\partial r}{\partial \varphi}$的几何意义

应该注意的是基向量$\left[\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}\right]$与上一节中我们取的基向量 $[\boldsymbol{\rho}^0,\boldsymbol{\varphi}^0,\boldsymbol{k}]$ 不完全一致。可以验证$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho}$就是 $\boldsymbol{\rho}^0$，$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}$就是 $\boldsymbol{k}$

(读者由图2.33可自行验证)，但是$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}$与$\boldsymbol{\varphi}^0$之间有些差异。从方向来说，两者是相同的，然而$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}$的大小不是单位值。因为(见图2.33)

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}\right| = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\left|\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta\varphi}\right| = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\left|\frac{2\rho\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi}\right| = |\rho|,$$

所以有关系式$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}=\rho\,\boldsymbol{\varphi}^0$。

对于柱坐标，与坐标曲线ρ,φ,z对应的基向量的大小$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho}\right|$，$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}\right|$和$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}\right|$依次是1，$\rho$和1。今后在作具体计算时务必不要将$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi}$与$\boldsymbol{\varphi}^0$混淆。▌

*** 如果把直角坐标也看成一种特殊的曲线坐标，试分析坐标曲面，坐标曲线以及基向量$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}$($i=1,2,3$)。***

取直角坐标中的向量基$\mathbf{i}=[\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3]$，可将向径$\boldsymbol{r}$表示为

$$\boldsymbol{r}=x_1(q_1,q_2,q_3)\boldsymbol{i}_1+x_2(q_1,q_2,q_3)\boldsymbol{i}_2+x_3(q_1,q_2,q_3)\boldsymbol{i}_3.$$

分别对q_1,q_2和q_3求偏导数，因为$\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2$和$\boldsymbol{i}_3$是常向量，可得

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}=\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\boldsymbol{i}_1+\frac{\partial x_2}{\partial q_1}\boldsymbol{i}_2+\frac{\partial x_3}{\partial q_1}\boldsymbol{i}_3, \\ \boldsymbol{e}_2=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}=\frac{\partial x_1}{\partial q_2}\boldsymbol{i}_1+\frac{\partial x_2}{\partial q_2}\boldsymbol{i}_2+\frac{\partial x_3}{\partial q_2}\boldsymbol{i}_3, \\ \boldsymbol{e}_3=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3}=\frac{\partial x_1}{\partial q_3}\boldsymbol{i}_1+\frac{\partial x_2}{\partial q_3}\boldsymbol{i}_2+\frac{\partial x_3}{\partial q_3}\boldsymbol{i}_3. \end{cases}$$

或写成矩阵形式

$$\mathbf{e}=\mathbf{i}\,\mathbf{P}, \tag{2.44}$$

其中 P 就是式(2.42)的雅可比矩阵。由此可见，如果把直角坐标与曲线坐标之间的关系看成是一种坐标变换关系(一般地说，这是一种非线性关系)，那么对应的向量基之间的变换矩阵就是雅可比矩阵。关系式(2.44)与柱坐标中的式(2.36)或直角坐标中的式(2.20)在形式上是完全相同的，但是这里的矩阵 P 的性质和以前的 P 不太一样，下面将要仔细地讨论它。

因为 $\det \mathbf{P} \neq 0$，所以存在 P 的逆矩阵 $\mathbf{P}^{-1}$ (但因 P 不一定是正交矩阵，所以 $\mathbf{P}^{-1}$ 不一定等于 $\mathbf{P}^T$)，因此式(2.44)也可写成

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}\,\mathbf{P}^{-1}. \tag{2.45}$$

一般地说，向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 不一定是互相正交的。如果它们互相正交，即满足条件

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = 0 \quad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, 3),$$

那么，这个曲线坐标系就称为**正交曲线坐标系**。直角坐标系和柱坐标系都是正交的。以后如无特殊说明，我们只限于讨论正交曲线坐标系①。必须注意，即使对于正交的曲线坐标系，矩阵 $\mathbf{P}^{-1}$ 也不一定等于 $\mathbf{P}^T$(为什么？)。

对于正交曲线坐标系，我们将 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 的大小分别记作 h_1, h_2, h_3，称为**拉梅系数**，即

$$h_i = |\boldsymbol{e}_i| = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_i}\right)^2},$$
$$i = 1, 2, 3.$$

于是 $[\boldsymbol{e}_1/h_1, \boldsymbol{e}_2/h_2, \boldsymbol{e}_3/h_3]$ 是一个**正交的单位向量基**，写成 $[\boldsymbol{e}_1^0, \boldsymbol{e}_2^0, \boldsymbol{e}_3^0]$，即有

$$[\boldsymbol{e}_1^0, \boldsymbol{e}_2^0, \boldsymbol{e}_3^0] = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] \begin{bmatrix} 1/h_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/h_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/h_3 \end{bmatrix}.$$

或写成矩阵形式：

① 在理论力学中，不常用非正交系，但本章以及以后要讨论的对正交系的理论方法，只要稍作变动，同样适用于非正交系。

$$\mathbf{e}^0 = \mathbf{e}\,\mathbf{H}^{-1},$$

或
$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^0\,\mathbf{H}, \tag{2.46}$$

其中矩阵 **H** 由拉梅系数组成，称为拉梅系数矩阵，它是对角矩阵，即

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{bmatrix}.$$

拉梅系数矩阵 **H** 与雅可比矩阵 **P** 之间的关系推导如下。因有①

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix} \cdot [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{bmatrix}^2 = \mathbf{H}^2,$$

或写成

$$\mathbf{e}^T\cdot\mathbf{e} = (\mathbf{e}^0\mathbf{H})^T\cdot(\mathbf{e}^0\mathbf{H}) = \mathbf{H}^T(\mathbf{e}^{0T}\cdot\mathbf{e}^0)\mathbf{H} = \mathbf{H}^2.$$

在以上推导过程中，已用到以下两个关系。因为 $\mathbf{e}^0$ 是正交单位基，所以 $\mathbf{e}^{0T}\cdot\mathbf{e}^0$ 等于单位矩阵，而 **H** 是对角矩阵，故 $\mathbf{H}^T = \mathbf{H}$。

另一方面，根据式(2.44)有

$$\mathbf{e}^T\cdot\mathbf{e} = (\mathbf{i}\mathbf{P})^T\cdot(\mathbf{i}\mathbf{P}) = \mathbf{P}^T(\mathbf{i}^T\cdot\mathbf{i})\mathbf{P} = \mathbf{P}^T\mathbf{P},$$

其中已用到 **i** 是正交单位基的性质。对比前后两个关系式就得到

$$\mathbf{P}^T\mathbf{P} = \mathbf{H}^2. \tag{2.47}$$

可见，对于一般的正交曲线坐标系，$\mathbf{P}^T\mathbf{P}$ 不一定等于 **I**，即正交曲线坐标系的变换矩阵 **P** 不一定是正交矩阵。只有在 **e** 本身是正交单位向量基时，拉梅系数矩阵才是单位矩阵，即 $\mathbf{H} = \mathbf{I}$，这时式(2.47)才有 $\mathbf{P}^T\mathbf{P} = \mathbf{I}$。从而 **P** 是正交矩阵。总之，只有两个正交

---

① 在以下运算中将对向量矩阵进行乘法运算，其运算法则与数量矩阵的乘法相似，只是这里的乘号是点乘。

而且经过归一化以后的基之间的变换矩阵才是正交矩阵。

因为式(2.47)只有在向量基是正交时才成立，所以我们可以利用$\mathbf{P}^T\mathbf{P}$是否为对角矩阵来判断曲线坐标的正交性。例如在例2.13中，已经写出了柱坐标的雅可比矩阵$\mathbf{P}$，计算$\mathbf{P}^T\mathbf{P}$得

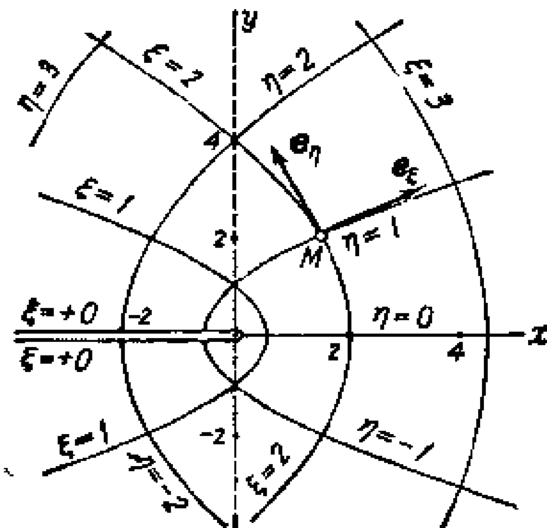
$$\mathbf{P}^T\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \rho^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\mathbf{H}^2.$$

这是一个对角矩阵，由此可以判断柱坐标是正交坐标系。对角线上诸元素就是拉梅系数的平方，即$h_\rho=1$，$h_\varphi=\rho$，$h_z=1$。这与例2.13计算的结果是一致的。

例2.14 抛物线柱坐标系由(ξ,η,ζ)给出$(\xi>0)$，它与(x,y,z)之间的关系是

$$x=\frac{1}{2}(\xi^2-\eta^2),\ y=\xi\eta,\ z=\zeta.$$



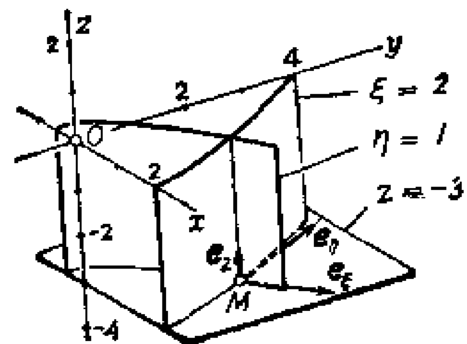


图2.34 抛物线柱坐标

在$\zeta=0$平面上的坐标曲线是：$\xi=$常量与$\zeta=0$的交线；$\eta=$常量与$\zeta=0$的交线。它们是两组抛物线族(图2.34)。判断此坐标系是否正交？如正交，求出拉梅系数。

解 根据式(2.42)算出雅可比矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\xi & -\eta & 0\\ \eta & \xi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

因此有

$$\mathbf{P}^T\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\xi & \eta & 0\\ -\eta & \xi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi & -\eta & 0\\ \eta & \xi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\sqrt{\xi^2+\eta^2} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{\xi^2+\eta^2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^2.$$

由于$\mathbf{P}^T\mathbf{P}$是对角矩阵，所以此曲线坐标系是正交的(从图2.34中可以看出$\boldsymbol{e}_\xi$与$\boldsymbol{e}_\eta$的正交性，另一个基向量$\boldsymbol{e}_z$即$\boldsymbol{k}$与纸面垂直，当然也是正交的)。拉梅系数为

$$h_\xi=\sqrt{\xi^2+\eta^2},\quad h_\eta=\sqrt{\xi^2+\eta^2},\quad h_\zeta=1. \ \blacksquare$$

例2.15 讨论仿射坐标系(图2.35)。设直角坐标(x,y,z)与仿射坐标(x',y',z')之间的关系为

$$\begin{cases}x=x'+\dfrac{1}{2}y',\\ y=y',\\ z=z'.\end{cases}$$

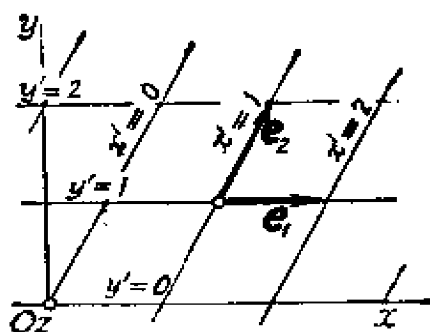


图2.35 仿射坐标系

解 雅可比矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

因此，有

$$\mathbf{P}^T\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\1/2 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 0\\1/2 & 5/4 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

由于 $\mathbf{P}^T\mathbf{P}$ 不是对角型的，所以是非正交的坐标系。从图 2.35 可以看出 e_1 和 e_2 显然不正交，即

$$e_1\cdot e_2\neq 0,$$

其数值就等于对角线以外不为零的那个元素，即1/2。对于非正交系，无拉梅系数可言。另外，仿射坐标系的 $\mathbf{P}$ 是常量矩阵，它不随点的位置变化。 ▎

下面我们推导曲线坐标系中点的速度和加速度公式，即通过其中的向量基 $\mathbf{e}$（或 $\mathbf{e}^0$）来表示点的速度和加速度，具体地说就是要求出 v 和 a 在 $\mathbf{e}$（或 $\mathbf{e}^0$）中的分量表达式。

设点的运动可由曲线坐标 q_1,q_2,q_3 与时间 t 的关系给出

$$q_1=q_1(t),\quad q_2=q_2(t),\quad q_3=q_3(t),$$

称为点的曲线坐标运动方程。或写成矩阵形式

$$\mathbf{q}=\mathbf{q}(t), \tag{2.48}$$

其中 $\mathbf{q}$ 指的是一个列矩阵 $\mathbf{q}=[q_1,q_2,q_3]^T$。式(2.48)就是以矩阵形式表示的曲线坐标运动方程。

点的向径 r 可表成曲线坐标的函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(q_1,q_2,q_3),$$

其中 $q_i(i=1,2,3)$是时间 t 的函数。对 t 求导数，得

$$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt}+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt}+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3}\frac{dq_3}{dt}$$

$$=\boldsymbol{e}_1\dot{q}_1+\boldsymbol{e}_2\dot{q}_2+\boldsymbol{e}_3\dot{q}_3.$$

或者写成矩阵形式

$$\boldsymbol{v}=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3][\dot{q}_1,\dot{q}_2,\dot{q}_3]^T=\mathbf{e}\dot{\mathbf{q}} \tag{2.49}$$

将式（2.46）代入得

$$\boldsymbol{v}=\mathbf{e}^0\mathbf{H}\dot{\mathbf{q}}. \tag{2.50}$$

这表示速度 $\boldsymbol{v}$ 在正交单位向量基 $\mathbf{e}^0$ 上的分量（同时也是投影）分别为

$$v_i=h_i\dot{q}_i \quad (i=1,2,3). \tag{2.51}$$

即在归一化以后的正交曲线坐标系中，速度在曲线坐标上的分量等于该曲线坐标对时间的导数①与相应的拉梅系数的乘积。

从速度表达式(2.49)的形式看，似乎与直角坐标系中 $\boldsymbol{v}=\dot{x}_1\boldsymbol{i}_1+\dot{x}_2\boldsymbol{i}_2+\dot{x}_3\boldsymbol{i}_3=\mathbf{i}\dot{\mathbf{x}}$ 一样简单，但要注意几点重大差别。首先，因为 $\mathbf{e}$ 没有归一化，所以 $\dot{\mathbf{q}}$ 的各个分量 $\dot{q}_1,\dot{q}_2$和 $\dot{q}_3$ 并不是在坐标方向的投影，而 $\dot{x}_1,\dot{x}_2$ 和 $\dot{x}_3$（即 $\dot{x}$，$\dot{y}$ 和 $\dot{z}$）既是分量又是投影。其次，在直角坐标系中有关系式 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{i}_1+x_2\boldsymbol{i}_2+x_3\boldsymbol{i}_3$，而 $\boldsymbol{v}=\mathbf{i}\dot{\mathbf{x}}$ 是由上式求一次导数得到的。但在曲线坐标中，一般地说，$\boldsymbol{r}\neq\mathbf{e}\mathbf{q}$，即

$$\boldsymbol{r}\neq q_1\boldsymbol{e}_1+q_2\boldsymbol{e}_2+q_3\boldsymbol{e}_3.$$

因此速度的表达式并不是由 $\boldsymbol{r}=\mathbf{e}\mathbf{q}$ 求一次导数得到的，最后，在直角坐标系中，$\boldsymbol{r}=\mathbf{i}\mathbf{x}$，因为 $\mathbf{i}$ 是常向量基，所以对 $\boldsymbol{r}$ 求一次、

---

① 有时把 q_i 称为广义坐标，$\dot{q}_i$ 称为广义速度．它们的确切含义详见第十章分析力学初步。

二次导数时只要对 x 求一次、二次导数就可以了，而在曲线坐标系中，因为 e 是与时间有关的，所以在对时间求导数时要特别注意。

下面我们具体地算出加速度。将式(2.44)代入式(2.49)得

$$v = \mathrm{i}\,\mathrm{P}\,\dot{\mathrm{q}}.$$

对 t 求一次导数，得

$$a = \dot{v} = \mathrm{i}(\dot{\mathrm{P}}\dot{\mathrm{q}} + \mathrm{P}\ddot{\mathrm{q}}).$$

再利用式(2.45)及式(2.46)代入得

$$\begin{aligned} a &= \mathrm{e}\mathrm{P}^{-1}(\dot{\mathrm{P}}\dot{\mathrm{q}} + \mathrm{P}\dot{\mathrm{q}}) \\ &= \mathrm{e}^0\mathrm{H}(\mathrm{P}^{-1}\dot{\mathrm{P}}\dot{\mathrm{q}} + \ddot{\mathrm{q}}). \end{aligned} \tag{2.52}$$

将 H 写成 $\mathrm{H}^{-1}\mathrm{H}^2 = \mathrm{H}^{-1}\mathrm{P}^T\mathrm{P}$，则上式可写成

$$a = \mathrm{e}^0(\mathrm{H}^{-1}\mathrm{P}^T\dot{\mathrm{P}}\dot{\mathrm{q}} + \mathrm{H}\ddot{\mathrm{q}}). \tag{2.53}$$

加速度在曲线坐标方向的分量可由 $a_i = \mathrm{e}_i^0 \cdot a\ (i=1,2,3)$ 求出。因为 H^{-1} 和 H 是对角矩阵，所以 a_i 的显式为

$$a_i = h_i\ddot{q}_i + \frac{1}{h_i}\sum_{j=1}^{3}(\mathrm{P}^T\dot{\mathrm{P}})_{ij}\dot{q}_j, \tag{2.54}$$

其中 $(\mathrm{P}^T\dot{\mathrm{P}})_{ij}$ 是矩阵 $\mathrm{P}^T\dot{\mathrm{P}}$ 的第 i 行第 j 列元素。

我们引进一个矩阵 Q，令

$$\mathrm{Q} = \mathrm{P}\mathrm{H}^{-1}.$$

这个矩阵 Q 是正交矩阵(为什么？)，于是加速度向量可以写成

$$a = \mathrm{e}^0(\dot{\mathrm{v}} + \mathrm{Q}^T\dot{\mathrm{Q}}\mathrm{v}), \tag{2.55}$$

其中 $\mathrm{v} = [v_1, v_2, v_3]^T = [h_1\dot{q}_1,\ h_2\dot{q}_2, h_3\dot{q}_3]^T$。

例2.16 应用以上结果计算柱坐标中加速度的分量。

解 设柱坐标为(ρ,φ,z)，它的雅可比矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

拉梅系数矩阵为

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

所以

$$\mathbf{P}^T\dot{\mathbf{P}}=\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix} -\dot{\varphi}\sin\varphi & -\dot{\rho}\sin\varphi-\rho\dot{\varphi}\cos\varphi & 0 \\ \dot{\varphi}\cos\varphi & \dot{\rho}\cos\varphi-\rho\dot{\varphi}\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & -\rho\dot{\varphi} & 0 \\ \rho\dot{\varphi} & \rho\dot{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

于是根据式（2.53）得

$$\boldsymbol{a}=[\boldsymbol{\rho}^0,\boldsymbol{\varphi}^0,\boldsymbol{k}]\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\rho\dot{\varphi} & 0 \\ \rho\dot{\varphi} & \rho\dot{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right.$$

$$\left.\times\begin{bmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{z} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \ddot{\rho} \\ \rho\ddot{\varphi} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}\right\}.$$

整理后即得

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\,\dot{\varphi}, \quad a_z = \ddot{z}. \quad \blacksquare$$

球坐标也是常用的一种曲线坐标。在球坐标中，点M的位置由三个独立变量(r,θ,φ)确定。r是由原点到M的距离，θ是OM与z轴的夹角，φ是OM在Oxy平面上的投影OM'与x轴的夹角①。你可以分别把它们设想为飞机相对于雷达站（O点）的距离、余仰角和方位角(图2.36)。

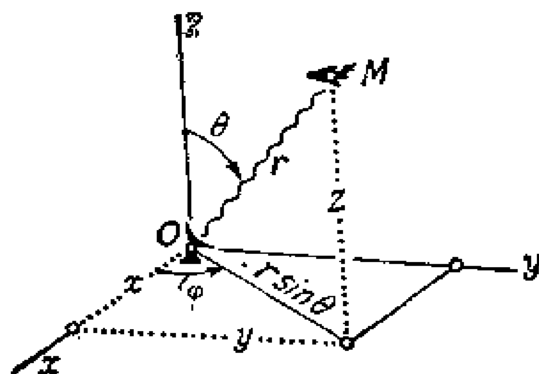


图2.36 球坐标

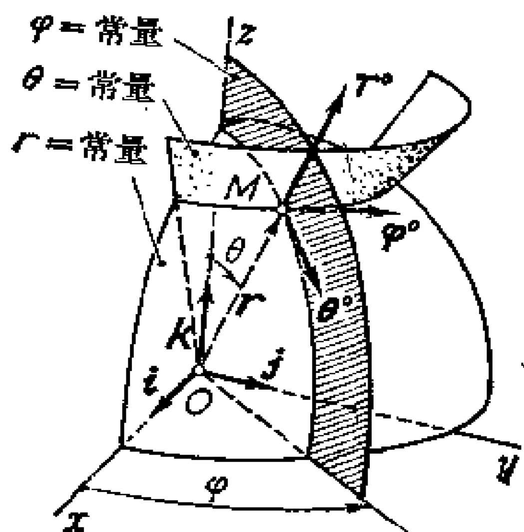


图2.37 球坐标曲面和坐标曲线

球坐标和直角坐标的关系是：

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases} \tag{2.56}$$

球坐标中坐标曲面分别是(图2.37)：

r＝常量的球面，

θ＝常量的锥面，

φ＝常量的平面。

① 这里的φ角和柱坐标中的φ角意义相同。

坐标曲线分别为沿向径的直线、圆周平面通过 Oz 轴的圆（经度圆）和平行于 Oxy 平面的圆（纬度圆）。

相应的雅可比矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix},$$

所以

$$\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix}.$$

这是对角矩阵，因此球坐标是正交曲线坐标系，其拉梅系数矩阵为

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r\sin\theta \end{bmatrix}.$$

如果采用式(2.53)计算加速度，则计算将十分冗长。我们改用式（2.55）进行计算。

速度分量表达式比较简单，根据式(2.51)有

$$\mathbf{v}=\begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_\varphi \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} h_r\dot{r} \\ h_\theta\dot{\theta} \\ h_\varphi\dot{\varphi} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ r\dot{\varphi}\sin\theta \end{bmatrix}. \tag{2.57}$$

正交矩阵 $\mathbf{Q}$ 为

$$\mathbf{Q}=\mathbf{P}\mathbf{H}^{-1}=\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix}.$$

容易验算，$\mathbf{Q}$ 就是由直角坐标向量基 $\mathbf{i}$ 到球坐标向量基 $[\boldsymbol{r}^0,\boldsymbol{\theta}^0,\boldsymbol{\varphi}^0]$ 的变换矩阵，因此每一列元素就是相应的球坐标基向量的方向余弦。例如，第一列元素就是基向量 $\boldsymbol{r}^0$ 在直角坐标系中的三个方

向余弦（或者说是 r^0 在直角坐标系中的分量）。根据这一性质，Q 也可以直接从几何关系求得。

由此可以算出

$$\mathbf{Q}^T\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{v}=\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix}\dot\theta\cos\theta\cos\varphi-\dot\varphi\sin\theta\sin\varphi & -\dot\theta\sin\theta\cos\varphi-\dot\varphi\cos\theta\sin\varphi & -\dot\varphi\cos\varphi\\ \dot\theta\cos\theta\sin\varphi+\dot\varphi\sin\theta\cos\varphi & -\dot\theta\sin\theta\sin\varphi+\dot\varphi\cos\theta\cos\varphi & -\dot\varphi\sin\varphi\\ -\dot\theta\sin\theta & -\dot\theta\cos\theta & 0\end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix}\dot r\\ r\dot\theta\\ r\dot\varphi\sin\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -\dot\theta & -\dot\varphi\sin\theta\\ \dot\theta & 0 & -\dot\varphi\cos\theta\\ \dot\varphi\sin\theta & \dot\varphi\cos\theta & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot r\\ r\dot\theta\\ r\dot\varphi\sin\theta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-r\dot\theta^2-r\dot\varphi^2\sin^2\theta\\ \dot r\dot\theta-r\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta\\ \dot r\dot\varphi\sin\theta+r\dot\theta\dot\varphi\cos\theta\end{bmatrix}. \tag{2.58}$$

$$\dot{\mathbf{v}}=\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\dot r\\ r\dot\theta\\ r\dot\varphi\sin\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\ddot r\\ r\ddot\theta+\dot r\dot\theta\\ r\ddot\varphi\sin\theta+\dot r\dot\varphi\sin\theta+r\dot\theta\dot\varphi\cos\theta\end{bmatrix}. \tag{2.59}$$

最后将式(2.58)和式(2.59)代入式(2.55)后，便得到球坐标中点的加速度分量（或投影）公式

$$\begin{cases}a_r=\ddot r-r\dot\theta^2-r\dot\varphi^2\sin^2\theta,\\ a_\theta=r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta-r\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta,\\ a_\varphi=r\ddot\varphi\sin\theta+2\dot r\dot\varphi\sin\theta+2r\dot\theta\dot\varphi\cos\theta.\end{cases} \tag{2.60}$$

表 2.1

	坐标	基向量	拉梅系数	向径	速度	加速度
正交曲线坐标	q_i①	$\mathbf{e}_i^0=\frac{1}{h_i}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}$	$h_i=\left\lvert\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\right\rvert$	$\mathbf{r}=\mathbf{r}(q_1,q_2,q_3)$②	$v_i=h_i\dot{q}_i$	$a_i=h_i\ddot{q}_i+\frac{1}{h_i}\sum_{j=1}^{3}(\mathbf{P}'\dot{\mathbf{P}})_{ij}\dot{q}_j$
直角坐标	x	$\mathbf{i}$	$h_x=1$	$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$	$v_x=\dot{x}$	$a_x=\ddot{x}$
	y	$\mathbf{j}$	$h_y=1$		$v_y=\dot{y}$	$a_y=\ddot{y}$
	z	$\mathbf{k}$	$h_z=1$		$v_z=\dot{z}$	$a_z=\ddot{z}$
柱坐标	ρ	$\boldsymbol{\rho}^0$	$h_\rho=1$	$\mathbf{r}=\rho\boldsymbol{\rho}^0+z\mathbf{k}$	$v_\rho=\dot{\rho}$	$a_\rho=\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2$
	φ	$\boldsymbol{\varphi}^0$	$h_\varphi=\rho$		$v_\varphi=\rho\dot{\varphi}$	$a_\varphi=\rho\ddot{\varphi}+2\dot{\rho}\dot{\varphi}$
	z	$\mathbf{k}$	$h_z=1$		$v_z=\dot{z}$	$a_z=\ddot{z}$
球坐标	r	$\mathbf{r}^0$	$h_r=1$	$\mathbf{r}=r\mathbf{r}^0$	$v_r=\dot{r}$	$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta$
	θ	$\boldsymbol{\theta}^0$	$h_\theta=r$		$v_\theta=r\dot{\theta}$	$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}-r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta$
	φ	$\boldsymbol{\varphi}^0$	$h_\varphi=r\sin\theta$		$v_\varphi=r\dot{\varphi}\sin\theta$	$a_\varphi=r\ddot{\varphi}\sin\theta+2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta+2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta$

注：①表中 $i=1,2,3$. ②注意，一般地说 $\mathbf{r}\neq q_1\mathbf{e}_1+q_2\mathbf{e}_2+q_3\mathbf{e}_3$.

本节所得出的点的速度和加速度的正交曲线坐标表达式是最一般的形式，在实际问题中最常用的直角坐标、柱坐标（当 $z=0$ 时就是极坐标）以及球坐标（当 $\theta=\pi/2$时也是极坐标）都可看作正交曲线坐标的特殊情况。我们把2-2、2-3 和2-4 的内容简单地归纳在表 2.1 中。

*** 推演抛物线柱坐标系（例2.14）中的加速度公式。***

*** 验证以下各曲线坐标系是正交的，画出坐标曲面及坐标曲线的简图，并求出拉梅系数，写出速度与加速度公式（其中a是常量）。

（1）椭圆柱坐标(ξ,η,ζ)：

$$x=a\cosh\xi\cos\eta,\quad y=a\sinh\xi\sin\eta,\quad z=z。$$

（2）双极坐标(ξ,η,z)

$$x=\frac{a\sinh\xi}{\cosh\xi-\cos\eta},\quad y=\frac{a\sin\eta}{\cosh\xi-\cos\eta},\quad z=z。$$

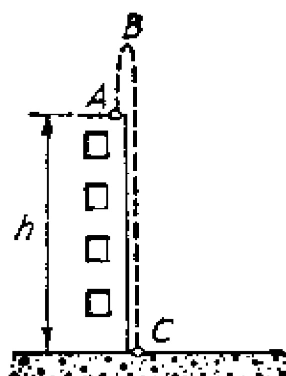
（3）旋转抛物面坐标(ξ,η,φ)：

$$x=\xi\eta\cos\varphi,\quad y=\xi\eta\sin\varphi,\quad z=\frac{1}{2}(\xi^2-\eta^2)。$$ ***

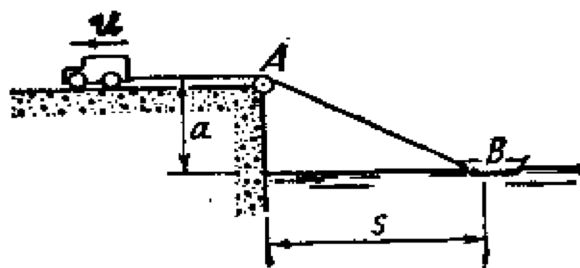
习　题

2.1 在高出地面 $h=14.7$ 米的 A 处以初速 $v_0=9.8$ 米/秒向上抛一物体。物体上升到 B 处后落到地面 C 处。重力加速度 $g=9.8$米/秒^2。求物体到达最高点 B 的时间和距离 AB，落地时间和落地时的速度，取 C 点为坐标原点，x 轴向上为正；又取 A 点为坐标原点，x 轴向下为正。比较这两种结果。图见下页。

2.2 岸高出水面的距离为 a，今在岸上有汽车拉着绳子（绳子另一端通过滑轮 A 连着水面上的小船 B）以等速率 u 向左开行（见图）。求当 AB 长等于 $2a$ 时，船 B 的速度和加速度为何值？



题 2.1 图



题 2.2 图

2.3 为测量一井的深度，自地面无初速地投下一颗石子，在时间 T 后听到石子击水面的声音。已知空气中声音的速度为 u，证明井深（井口到水面的距离）为

$$H=\left[\sqrt{\frac{u^2}{2g}+Tu}-\sqrt{\frac{u^2}{2g}}\right]^2.$$

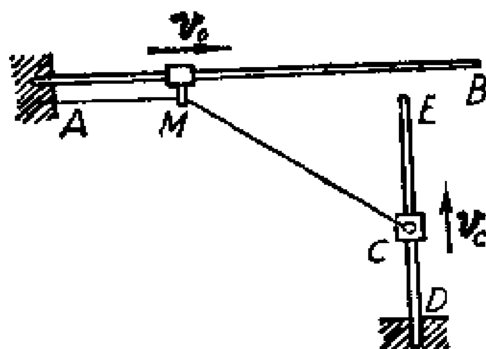
当井不太深时，上式可用近似式：

$$H=\frac{1}{2}gT^2(1-gT/u).$$

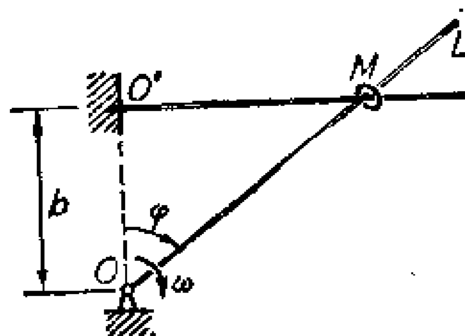
2.4 一绳 AMC 之一端系于定点 A，绳子穿过滑块 M 上的小孔。绳的另一端系于滑块 C 上。滑块 M 以已知等速 v_0 运动。绳长为 l，AE 的距离为 a 并垂直于 DE。求滑块 C 的速度与距离 $AM=x$ 的关系。又当滑块 M 经过 E 点时，滑块 C 的速度为何值？图见下页。

2.5 细杆 OL 以等角速 $\dot{\varphi}=\omega$ 绕定点 O 转动，此杆推动一个穿在固定直铁丝上的小环 M，O 点与铁丝的距离为 b。求小环的速度与加速度（以距离 $O'M=x$ 之函数表示）。图见下页。

2.6 一船向东航行，速率为每小时 15 公里，在正午时经过灯塔。另一船以同样的速率向北航行，在下午 1 时30分经过同一



题 2.4 图



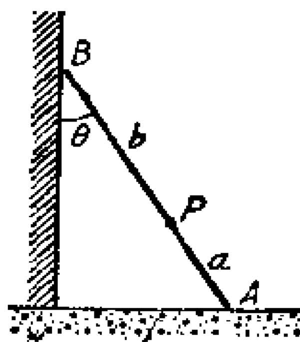
题 2.5 图

灯塔。问在什么时候两船的距离最近？最近的距离是多少？

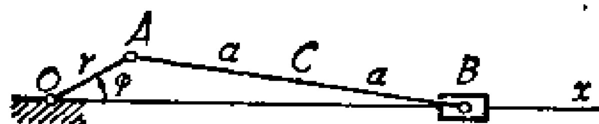
2.7 设$x=a+\alpha f(t)$，$y=b+\beta f(t)$，$z=c+\gamma f(t)$。如要使运动成为等加速运动，问$f(t)$应为怎样的函数？已知a,b,c,α,β及γ等都是常量。

2.8 一质点沿圆锥曲线$y^2-2mx-nx^2=0$运动，其速率为常量c。求它的速度在x及y方向的分量。已知m和n为常量。

2.9 梯子的一端A放在水平地面上，另一端B靠在竖直墙上。梯子保持在竖直平面内沿墙滑下。已知A点的速度为常值v_0，P为梯子上一点，$PA=a$，$PB=b$。求当梯子与墙的夹角为θ时，P点的速度和加速度的大小。



题 2.9 图

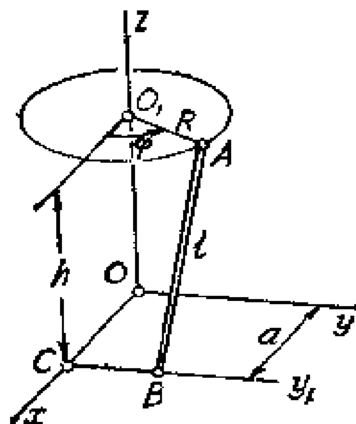


题 2.10 图

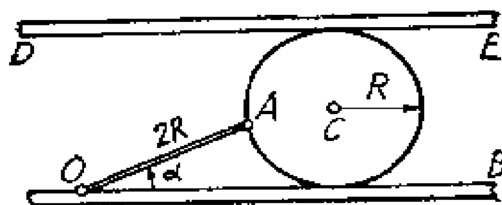
2.10 曲柄$OA=r$，以等角速度$\omega=\dot{\varphi}$绕定点O转动。它带动连杆AB使滑块B沿直线Ox运动。求连杆的中点C的轨迹及

速度。已知 $AB=2a$，$\angle AOB=\varphi$。

2.11 A，B两点用一杆相连，A 点在平行于 Oxy 的平面内沿中心在 Oz 轴上的圆周运动；B 点在沿平行于 Oy 轴的直线 Cy_1 滑动(见图)。求 B 点的速度与 φ 角的关系。已知 $OO_1=h$，$OC=a$，$O_1A=R$，$AB=l$，A 点的速率为 v_A。



题 2.11 图



题 2.12 图

2.12 长 $2R$ 的杆子 OA 以等角速 $\omega=\dot{\alpha}$ 绕其固定端 O 转动，另一端 A 用铰链固定在半径为 R 的圆盘边界上。圆盘可在两平行导板 OB 与 DE 之间滑动。求盘中心 C 的速度与$\angle AOB=\alpha$ 之间的关系。

2.13 设一子弹水平地射在靶子上，它的速率等于声速之 n 倍 $(n>1)$。求证：同时听到放枪声和子弹打靶声的地点均在一偏心率为 n 的双曲线上。

2.14 设一质点沿一空间曲线运动，其速度为 $\boldsymbol{v}$，加速度为 $\boldsymbol{a}$。证明其轨迹的曲率半径之值为

$$\rho=\frac{v^3}{|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}|}.$$

2.15 一质点以常速率 c 沿一曲线运动。求证它的速度向量 $\boldsymbol{v}$ 与加速度向量 $\boldsymbol{a}$ 垂直。

2.16 一点在平面内运动，其速度为 $\boldsymbol{v}$，加速度为 $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{v}+\boldsymbol{b}$，其中 k 是常量，$\boldsymbol{b}$ 是常向量。证明点的加速度的方向不变。

2.17　一点以常速率 c 划一旋轮线轨迹，旋轮线的方程为

$$x=R(\theta-\sin\theta),\quad y=R(1-\cos\theta),$$

式中 R 是常量。求证它在 y 轴上的投影作等加速度运动。

2.18　已知点的动动方程为 $\rho=bt$，$\varphi=at$。分别用极坐标和直角坐标写出点的運动轨迹。

2.19　一点划平面曲线轨迹，其径向速度为正的常值，径向加速度为负值且与到原点之距离的三次方成正比，即

$$v_\rho=c>0,\quad a_\rho=-\frac{b^2}{\rho^3}.$$

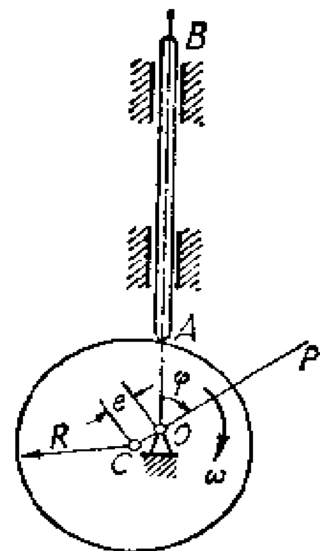
求点的轨迹和面积速度。已知 $t=0$ 时，$\rho=\rho_0,\varphi=\varphi_0$，且 $\dot{\varphi}>0$。

2.20　一点划出平面曲线轨迹，已知向径扫过的面积速度与向径的模成正比，其径向速度为常量，即面积速度

$$\sigma=\frac{1}{2}a\rho,\ v_\rho=b\,(a>0,b>0),$$

且当 $t=0$ 时 $\varphi=0$，$\rho=\rho_0$。求点的轨迹及运动方程。

2.21　凸轮之周界相对于固连在轮上的极轴 OP 所写出的极坐标方程为 $\rho=\rho(\varphi)$，凸轮以角速度 $\omega(t)$ 绕定点 O 转动。这轮推动挺杆 AB，杆轴的延长线始终通过 O 点。求挺杆的速度和加速度。已知 $\omega=$ 常量，且凸轮的形状是一偏心圆，半径为 R，偏心距为 e（见图）。当 $e\ll R$ 时，分析挺杆的速度和加速度。



题 2.21 图

2.22　一直杆以等角速度 ω_0 绕其固定端 O 转动，杆上有一滑块，其沿杆滑动的速度与到 O 点的距离成正比，比例常数为 k。求滑块的轨迹和速度的大小。已知 $t=0$ 时 $\rho=\rho_0,\varphi=0$。

2.23　一点作平面运动，其径向速度和横向速度分别为 $\lambda\rho$ 及 $\mu\varphi$，λ 及 μ 是常量。试证其径向和横向加速度为：

$$a_\rho=\lambda^2\rho-\frac{\mu^2\varphi^2}{\rho}, \qquad a_\varphi=\mu\varphi\left(\lambda+\frac{\mu}{\rho}\right).$$

2.24　一点作平面运动，其速率为常量 c，向径角速度的大小为常量 ω。求点的运动方程及其轨迹。已知当 $t=0$ 时，$\rho=0$，$\varphi=0$。

2.25　直线 FP 在一椭圆平面内以等角速度 ω 绕椭圆的焦点 F 转动。已知以 F 为坐标原点的椭圆的极坐标方程为

$$\rho=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi}$$

式中 a 为椭圆的半长轴，e 为离心率。求直线 FP 与椭圆的交点 M 点的速度。

2.26　一点运动的轨迹为平面曲线，其速度在 y 轴上的投影始终是常量 c。求证点的加速度的大小为 $a=v^3/c\rho$，其中 v 为速率，ρ 为曲率半径。

2.27　一点沿半径为 R 的圆周运动，其速度向量与加速度向量之间的夹角 α 保持不变。(1) 求证点的速度可以表示为 $v=v_0e^{c(\theta-\theta_0)}$，式中 θ 为速度向量与 x 轴之间的夹角，且当 $\theta=\theta_0$ 时，$v=v_0$；(2) 用时间 t 的函数表示速度的大小。

2.28　一桥之形状为抛物线 $y=-0.005x^2$，其中 x 与 y 的单位是米。一汽车以常速率 $v_0=72$公里/小时驶过这桥。求汽车在桥顶时加速度的大小。

2.29　一点沿半径为 R 的圆周按 $s=v_0t-ct^2/2$ 之规律运动。问此点加速度的大小等于多少？又问当 t 等于多少时加速度的大小等于 c，此时该点一共已走了多少圈？

2.30　一点沿抛物线 $y^2=2px$ 运动，其切向加速度为法向加速度的 $-2k$ 倍。如点从正焦弦的一端 $(p/2,-p)$ 以速率 u 出发，求它到达正焦弦另一端 $(p/2,p)$ 时的速率。

2.31 设一点的运动方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{q}_1\cos t+\boldsymbol{q}_2\sin t+\boldsymbol{q}_3 t,$$

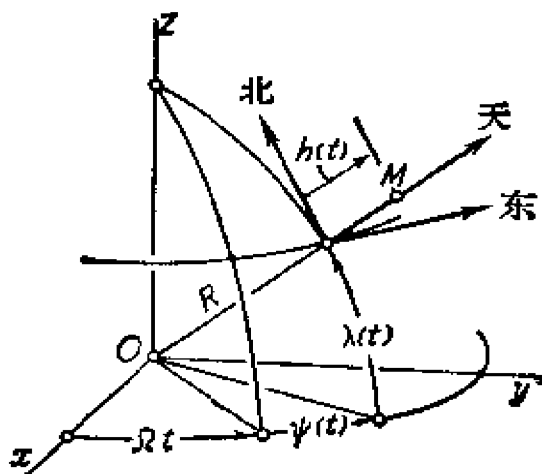
式中$[\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_3]$为正交向量基，且$q_1^2=q_2^2$。求点的运动轨迹、速度、加速度及曲率半径。

2.32 飞机M在每一时刻t的经度为$\psi(t)$，纬度为$\lambda(t)$，高度为$h(t)$，于是在地心坐标系中飞机的球坐标运动方程为：

$$r=R+h(t),$$

$$\theta=\frac{\pi}{2}-\lambda(t),$$

$$\varphi=\Omega t+\psi(t).$$

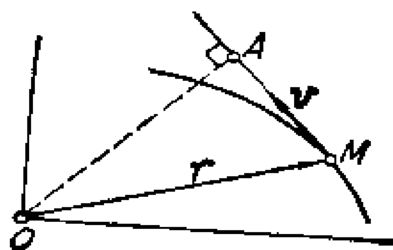


题 2.32 图

其中R是地球半径，Ω是地球自转角速度。求飞机的东向、北向和天向的速度分量公式，以h，λ和ψ表示。

如果飞机相对于地球的航速为$u(t)$，且以等高度h沿经线由南向北飞行，它的加速度分量等于多少？又如飞机在同样条件下沿纬度由西向东航行，其加速度分量又为多少？

2.33 设点的球坐标运动方程为$r=b$，$\vartheta=\vartheta_0\cos\omega t$，$\varphi=\omega t$，其中$b$，$\omega$和$\theta_0$为常量。求点的速度和加速度的球坐标分量。



题 2.34 图

2.34 一点M的轨迹为平面曲线，M点的向径为$\boldsymbol{r}$，速度为$\boldsymbol{v}$。直线OA垂直于过M点的切线且与切线相交于A点。证明A点的速率$v_A=rv/\rho$，其中ρ为轨迹在M点的曲率半径。

第三章 刚体运动和复合运动

3-1 刚体的两种基本运动

刚体的两种基本运动是平行移动和绕定轴的转动。如果刚体在运动过程中，它上面的任一直线始终保持和自身原位置平行，则这种运动称为**平行移动**，简称**平动**或**平移**。

体育锻炼用的浪木（图3.1）的左右晃动是平动，运动时浪木上各个点的轨迹都是半径相同的圆弧。平动刚体上各点的运动总是相同的，下面我们证明这一结论。

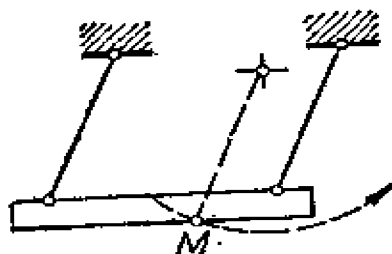


图3.1 浪木

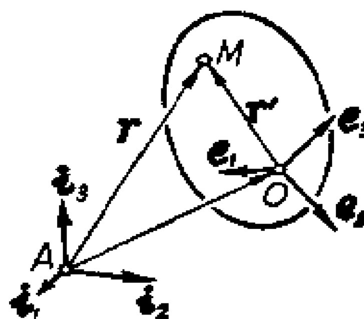


图3.2 固连坐标系

在参考系中取定直角坐标系$[A,\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3]$，另外在平动的刚体上装一个固连的直角坐标系$[O,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$（图3.2）。$O$是刚体上任意取定的点，$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$是单位正交基向量，它们与刚体固连在一起，即随刚体一起运动。因为刚体作平动，其上任一直线保持平行，所以$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$保持方向不变，它们是常向量。设刚体上一点$M$在$[O,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$中的坐标是$(\xi,\eta,\zeta)$，于是

$$\boldsymbol{r}'=\overrightarrow{OM}=\xi\boldsymbol{e}_1+\eta\boldsymbol{e}_2+\zeta\boldsymbol{e}_3.$$

这里 ξ,η,ζ 是常量(因是刚体)，e_1,e_2,e_3 是常向量（因是平动），故有 $dr'/dt=0$ [1]。

M点的运动由 $r=r(t)$ 确定，因为有

$$r=\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AO}+r'$$

于是点M的速度和加速度为

$$v=\dot{r}=\frac{d}{dt}(\overrightarrow{AO})+\dot{r}'=v_O,$$

$$a=\dot{v}=\dot{v}_O=a_O.$$

因为M和O两点都是任意取的，所以**平动刚体上任意两点的速度相同，加速度相同**。由此不难推断刚体上各点的运动轨迹的形状相同。

根据以上性质可知，研究刚体平动的问题实质上就只要分析刚体上任一个点的运动就可以了。因此，第二章所讲的点的运动有两重意义，一是代表大小可以忽略的物体的运动，二是代表大小不能忽略但作平动的刚体的运动。

刚体在运动过程中，如果它有一条直线上的点始终保持不动[2]，即刚体有一固定轴，这种运动叫**定轴转动**。要注意的是固定轴可能在刚体内部，例如齿轮的转动，地球的自转等。固定轴也可能在刚体的外部，此时就要设想刚体可以延拓，而轴在延拓体上面。例如列车转弯时（假定弯道是一个圆弧）车厢的转动轴就在车厢的外部(图3.3)。

定轴转动时，刚体的位置可以用一个变化的角度来确定，在参考系内取直角坐标系 $[O,i,j,k]$，即 $Oxyz$，将 z 轴与固定轴取得一致(图3.4)。在刚体上任取一个包含 z 轴在内的平面(图中

---

① 其实，这个结果可以从$\overrightarrow{OM}$本身大小和方向都不变（因为刚体作平动）直接得出。上面这样的推导是为了与今后对转动情况的讨论相一致。

② 实际上只要刚体上有两个点始终保持不动，那么通过这两点的直线上的所有的点都不会动，否则将会与刚体上任意两点间的距离不变这一性质发生矛盾。

有阴影的平面），它的位置就可以代表刚体的位置。这个平面的位置可由角φ来确定，φ是空间某个过z轴的固定平面与刚体上取

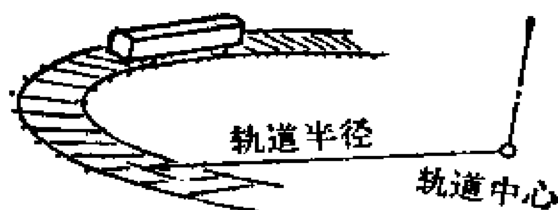


图3.3　车厢的转动轴在哪里？

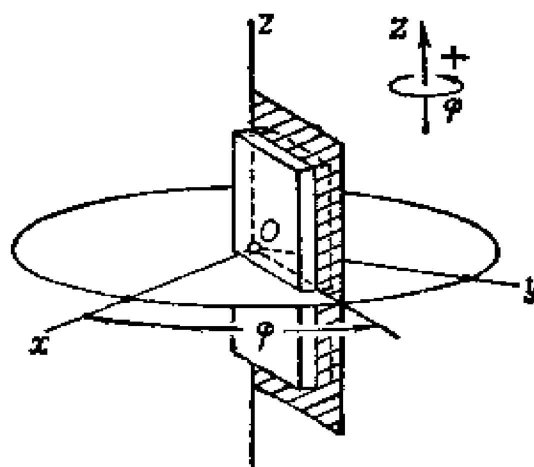


图3.4　转动刚体的转角

定的那个平面之间的夹角。例如，在图 3.4 中，Oxz 平面就是固定平面，因此 φ 角就是确定刚体位置的转角。刚体上每一点都在作圆周运动（圆心在 z 轴上），每一点转过的角都是同一个 φ 角。φ 的正负号可以这样规定：以 z 轴的正向为准，符合右手螺旋规则的为正，反之为负。设每一时刻 t，刚体的转角 φ 是已知的，即已知函数 $\varphi=\varphi(t)$，则刚体的运动就完全确定了。这就是刚体的转动方程，也可以说是刚体作定轴转动的运动方程。

将转角 φ 对时间 t 求导数，得

$$\dot{\varphi}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

它描述了刚体转动的快慢和指向。当 $\dot{\varphi}>0$ 时，说明朝 φ 增大的方向转动，当 $\dot{\varphi}<0$ 时，则相反。$\dot{\varphi}$ 叫做角速度，通常用符号 ω 来代表，但在本书中，为了行文方便，规定 $\omega=|\dot{\varphi}|$，即 $\dot{\varphi}=\pm\omega$。这样，ω 就代表角速度的大小，而正负号代表转向①。

---

① 在不致引起误解的地方，有时也把ω当作带正负号的代数量，即 $\omega=\dot{\varphi}$。

刚体上每一点都在作圆周运动，圆周运动的角速度都是相同的，就是这个 $\dot{\varphi}$。

$\dot{\varphi}$ 对时间 t 的导数说明角速度的变化率，称为**角加速度**，它的大小用 ε 来代表，即 $\varepsilon=|\ddot{\varphi}|$，$\ddot{\varphi}=\pm\varepsilon$，其中正负号也代表指向。在与转动轴垂直的平面中画图时，可以用带箭头的圆弧代表角速度和角加速度，如图 3.5 中箭头说明 $\dot{\varphi}$ 是负的，$\ddot{\varphi}$ 是正的，即刚体在这个时刻按顺时针（φ 在减小）方向转动，而且正在越转越慢（ω 在减小）。

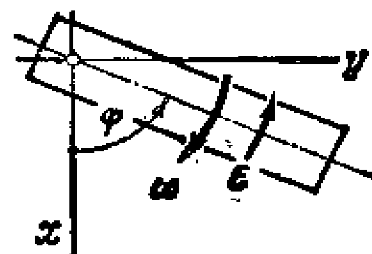


图3.5　用箭头表示ω与ε

角速度的量纲是[时间]$^{-1}$，角加速度的量纲是[时间]$^{-2}$。通常所用的角速度单位是1/秒，即1弧度/秒，或转/分等。角加速度的单位是1/秒^{2}或转/分^{2}等。例如地球在地心参考系中的自转角速度是

$$1\text{转/恒星日}=2\pi/86164\text{秒}=7.29\times10^{-5}\ 1/\text{秒}。$$

有的电机的转速是3000转/分，即 $50\times2\pi$ 1/秒，相应于50赫芝（每秒50周）的交流电频率。

转动刚体的角速度和角加速度的瞬时值刻划了此瞬时刚体整体的运动状态。下面我们推导定轴转动的刚体上任意点的速度和加速度与这两个量之间的关系式。

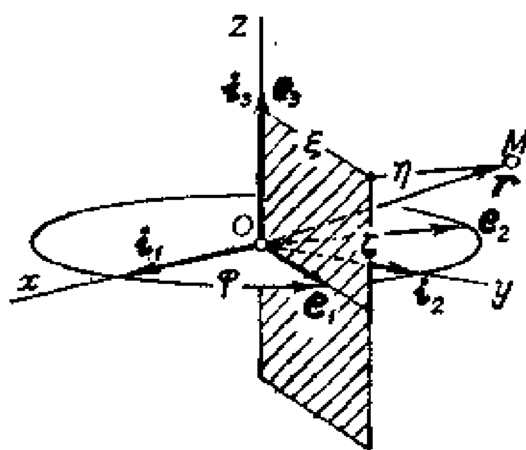


图3.6　固定系与固连系

在刚体上装一个固连直角坐标系 $[O,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$，$O$ 是转动轴上任取的一点，取 $\boldsymbol{e}_3$ 与 z 轴正向重合。为了说明问题方便起见，将 $\boldsymbol{e}_1$ 取在前面所说的（图3.4中）有阴影的那个平面内（图 3.6）。刚体相对于固定在参考系中的坐

标系（以后简称为固定系）$[O,\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3]$的运动由$\varphi=\varphi(t)$给出，而$\varphi$是$\boldsymbol{e}_1$与$\boldsymbol{i}_1$之间的夹角。

设刚体上一点M的向径$\boldsymbol{r}$在$[O,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$内的投影为$\xi,\eta,\zeta$，即有

$$\boldsymbol{r}=\xi\boldsymbol{e}_1+\eta\boldsymbol{e}_2+\zeta\boldsymbol{e}_3,$$

或写成矩阵形式

$$\boldsymbol{r}=\mathbf{e}\boldsymbol{\xi}'. \tag{3.1}$$

和以前一样，这里$\mathbf{e}$代表一个行向量阵：$\mathbf{e}=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$，而$\boldsymbol{\xi}'$代表一个数列阵：$\boldsymbol{\xi}'=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]^T=[\xi,\eta,\zeta]^T$。

刚体在转动时，ξ,η,ζ是不变的，而$\mathbf{e}$的元素相对于$\mathbf{i}$来说是变的，它们是时间t的向量函数。所以，将式(3.1)对时间t求导便得M点的速度

$$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}=\xi\dot{\boldsymbol{e}}_1+\eta\dot{\boldsymbol{e}}_2+\zeta\dot{\boldsymbol{e}}_3=\dot{\mathbf{e}}\boldsymbol{\xi}'. \tag{3.2}$$

为了计算$\dot{\mathbf{e}}=[\dot{\boldsymbol{e}}_1,\dot{\boldsymbol{e}}_2,\dot{\boldsymbol{e}}_3]$，我们先写出$\mathbf{e}$和$\mathbf{i}$之间的变换关系

$$[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]=[\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3]\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

或简写成

$$\mathbf{e}=\mathbf{i}\,\mathbf{Q}. \tag{3.3}$$

如果把$\mathbf{e}$和$\mathbf{i}$之间的关系看成是一种坐标变换关系，那么$\mathbf{Q}$就是变换矩阵①。式(3.3)与上一章中的式(2.20)和式(2.44)在形式上虽然一样，但在含义上又有不同之处（请读者自己进行对比分析）。$\mathbf{Q}$是正交矩阵，即有$\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{Q}^T$。因此式(3.3)可以写成

$$\mathbf{i}=\mathbf{e}\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{e}\mathbf{Q}^T.$$

将式(3.3)对时间t求一次导数并将上式代入，便得

$$\dot{\mathbf{e}}=\mathbf{i}\dot{\mathbf{Q}}=\mathbf{e}\,\mathbf{Q}^T\dot{\mathbf{Q}} \tag{3.4}$$

① 因为现在是从单位正交基到单位正交基的变换，所以变换矩阵记作$\mathbf{Q}$，以便与2-4中的记法一致。

代入式(3.2)，得

$$\boldsymbol{v}=\mathbf{e}\,\mathbf{Q}^{T}\dot{\mathbf{Q}}\,\xi'. \tag{3.5}$$

矩阵$\mathbf{Q}^{T}\dot{\mathbf{Q}}$的具体形式是：

$$\mathbf{Q}^{T}\dot{\mathbf{Q}}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\dot{\varphi}\sin\varphi & -\dot{\varphi}\cos\varphi & 0\\ \dot{\varphi}\cos\varphi & -\dot{\varphi}\sin\varphi & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & -\dot{\varphi} & 0\\ \dot{\varphi} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

这是一个反对称矩阵，我们称它为**角速度矩阵**。如果把式(3.4)看成是一个从$\mathbf{e}$到其自身对时间t的导数$\dot{\mathbf{e}}$的变换关系，那么角速度矩阵就是相应的变换矩阵。

将式(3.6)代入式(3.5)得

$$\boldsymbol{v}=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]\begin{bmatrix}0 & -\dot{\varphi} & 0\\ \dot{\varphi} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{bmatrix}=\xi\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_2-\eta\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_1. \tag{3.7}$$

我们引进一个向量$\boldsymbol{\omega}=\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_3$，叫做**角速度向量**①。这个向量的大小就是前面所说的角速度$\omega=|\dot{\varphi}|$，方向沿固定的转动轴，指向按右手螺旋规则确定。角速度向量刻划了刚体作定轴转动时的整体特征。例如，作定轴转动的自行车轮子，我们只说车轮转得有多快，而决不强调哪根钢丝转得有多快，因为每根钢丝转得一样快。于是式(3.7)可以写成

① 角速度向量表达式中的$\dot{\varphi}$就是角速度矩阵的第二行第一列元素，这是从形式上来看它们之间的关系。关于角速度向量的详细讨论，将在3-4中进行。

$$\boxed{v=\omega\times r.}\tag{3.8}$$

根据向量叉积的定义，有

$$\omega\times r=\begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\\ 0 & 0 & \dot{\varphi}\\ \xi & \eta & \zeta\end{vmatrix}=\xi\dot{\varphi}e_2-\eta\dot{\varphi}e_1.$$

由此可见，式(3.8)与式(3.7)是等价的。显然式(3.8)要比式(3.7)简单、实用，因为它不必计算角速度矩阵。这就是我们要引进角速度向量的理由所在。式(3.8)叫做刚体作定轴转动时刚体上各点的**速度分布公式**，它给出了转动刚体的整体特征量 ω 与刚体上任意点的速度 v 之间的关系。

如果我们不依靠前面所作的一系列推导，直接由向量叉积的性质，也可以说明式(3.8)的正确性①。先看刚体上任意点 M 的

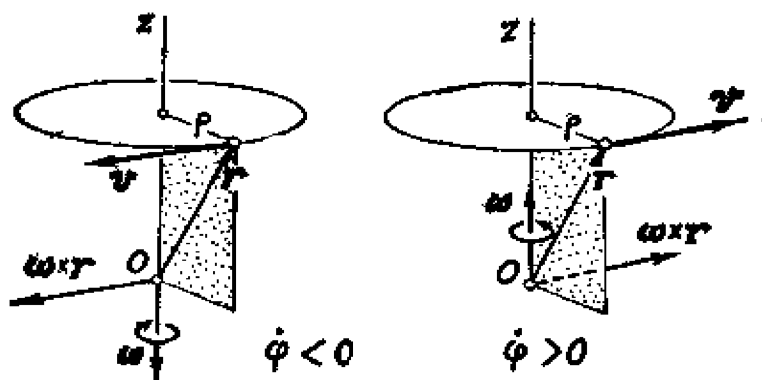


图3.7　转动刚体上点的速度

速度(图3.7)。M点作圆周运动，圆心在定轴上。M点的运动平面与定轴垂直，其速度大小等于圆半径 ρ 乘以角速度 $\dot{\varphi}$，方向沿圆周的切线，指向由 $\dot{\varphi}$ 的正负号来确定。另一方面，我们再看

① 一般的教科书上都采用这种讲法。我们这里增加了较严格的分析推导，以便和以后几节组成一个整体。两种方法都是力学中的基本方法，要求掌握。

$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$。按规定$\boldsymbol{\omega}$沿固定轴，所以，$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$垂直于$\boldsymbol{r}$与此轴所成的平面，即上面所说的圆周切线方向。至于大小，根据叉积的定义，有

$$|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}|=|\omega||r|\sin(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{r})=\omega\rho,$$

与上面所说的点的速度大小一致，所以式(3.8)得到验证。

在具体计算中，应用式(3.8)时，不必每次都算向量叉积，可用数量形式来代替。上面说过，转动刚体上的点都在作圆周运动，其速度大小就是$\rho\omega$，ρ是圆的半径，即点到定轴的垂直距离。速度的方向和指向由几何直观立即就可以看出，图3.7中分别表示了$\dot{\varphi}>0$和$\dot{\varphi}<0$两种情况的速度指向。

从速度分布公式可知：在同一瞬时，刚体上离轴越远的点的速度越大。例如一个转动着的飞轮上各点在同一瞬时的速度分布情况如图3.8所示，其中以箭头的长短表示速度的大小。又如，两个

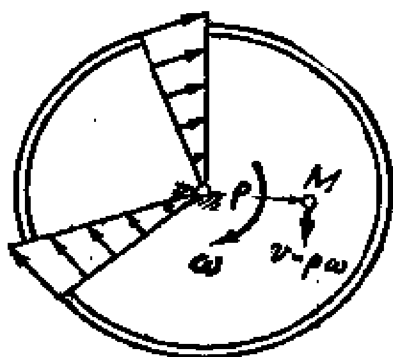


图3.8 飞轮上各点的速度

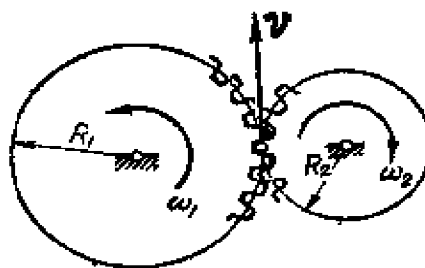


图3.9 啮合的齿轮

齿轮啮合时（图3.9），它们在啮合处点的速度应相同，即

$$v=R_1\omega_1=R_2\omega_2.$$

于是齿轮的转速与它的半径成反比，大轮转得慢，小轮转得快。

将式(3.8)再对时间t求一次导数，便得

$$\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}}=\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}},$$

其中$\dot{\boldsymbol{\omega}}=\ddot{\varphi}\boldsymbol{e}_3$，用$\boldsymbol{\varepsilon}$表示，称为**角加速度向量**。显然，$\boldsymbol{\varepsilon}$也是沿着

定轴的。

将 $\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ 代入上式，最后得出刚体上各点的加速度分布公式

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}).\qquad(3.9)$$

M点作圆周运动（图3.10），$\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}$是切向加速度，其大小为$\rho\varepsilon$，指向由$\boldsymbol{\varepsilon}$的指向即由$\ddot{\varphi}$的正负号确定。$\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$ 是法向加速度，即向心加速度，它的大小等于$\rho\omega^2$。所以总加速度的大小 $a=\sqrt{(\rho\omega^2)^2+(\rho\varepsilon)^2}=\rho\sqrt{\omega^4+\varepsilon^2}$，方向如图3.11所示。注意到$\omega^2$

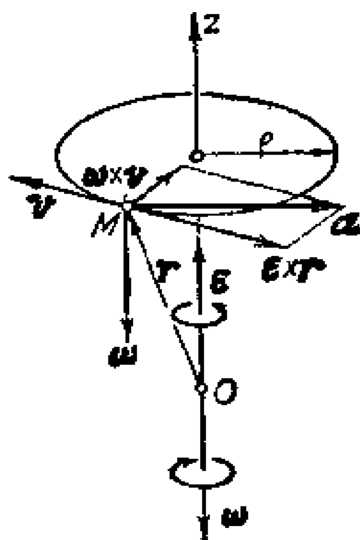


图3.10　转动刚体上点的加速度

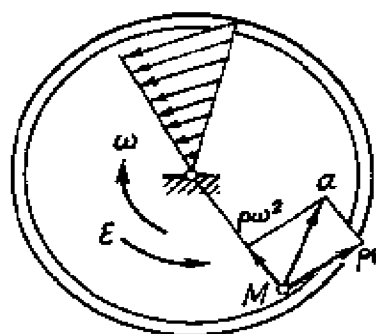


图3.11　加速度分布

的量纲和ε的量纲相同，所以在根式中出现ω的四次方和ε的平方相加。我们在推导物理公式时，要经常检查量纲是否合适，以此作为检查公式是否正确的一种初步手段。如果出现两个不同量纲的量相加，那么可以断定推导已经出错。

设飞轮在某一瞬时的$\boldsymbol{\omega}$和$\boldsymbol{\varepsilon}$已知，则轮上各点的加速度分布如图3.11所示。因此，角加速度$\boldsymbol{\varepsilon}$和角速度$\boldsymbol{\omega}$一样，也是刻划刚体

转动的整体特征量。

最后，可以谈谈一个类比关系。刚体绕定轴 Oz 转动时，只要用一个变量 φ 就可以确定它的位置，我们就说此时刚体只有一个自由度①。点沿直线 Ox 轴的运动也只有一个自由度，它的位置用一个变量 x 来确定。比较下表左右两栏内容：

刚体绕 z 轴的定轴转动	点沿 x 轴的直线运动
转动方程　$\varphi=\varphi(t)$	运动方程　$x=x(t)$
角速度　$\omega_z=\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{k}=\dot{\varphi}$ $\omega=\lvert\dot{\varphi}\rvert$	速度　$v_x=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{i}=\dot{x}$ $v=\lvert\dot{x}\rvert$
角加速度　$\varepsilon_z=\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{k}=\ddot{\varphi}$ $\varepsilon=\lvert\ddot{\varphi}\rvert$	加速度　$a_x=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}=\ddot{x}$ $a=\lvert\ddot{x}\rvert$

可以发现，$\varphi,\omega_z,\varepsilon_z$ 三量之间的关系和 x,v_x,a_x 三量之间的关系是完全相似的。当然，这两种情况在物理上并不一样，一个是刚体，另一个是点；一个是转动，另一个是直线运动；等角速转动是周而复始的，而等速直线运动是一去不复返的。从量纲上看也是很不一样的。但是，只要有这种数学上的类似关系存在，我们就可以把直线运动中一些现成的结果"翻译"过来，而不必重新推导。因此，我们可以仿照点的匀加速运动而立即写出刚体作匀加速转动时的公式：

$$\varphi=\varphi_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\varepsilon_0 t^2,$$

$$\omega^2-\omega_0^2=2\varepsilon_0(\varphi-\varphi_0),$$

其中 φ_0，ω_0 是初始角位置和角速度，ε_0 是常角加速度。

***　刚体平动时各点的轨迹是否一定为平面曲线？举例说

① 自由度数是描述刚体或系统位形所需要的独立变量的数目。关于自由度的严格定义，详见10-2 和 10-8。

明之。* * *

* * * 在地心参考系中，估算一下由于地球自转而引起的，在纬度 40° 处地面上一点的速度和加速度的大小，地球半径为6378公里。* * *

* * * 刚体定轴转动时，如果运动方程是 $\varphi=\varphi_0\sin\omega t$，讨论刚体运动的特点。* * *

3-2 刚体的平面运动

除了平动和定轴转动外，另一种常见的刚体运动是平面运动。前面讲过的沿直线轨道滚动的轮子，在竖直平面内倒下的梯子，都是作平面运动的刚体。研究刚体的平面运动有两方面的意义。一方面，在工程中有许多机构的运动是平面运动或者可以简化成平面运动，因此具有直接应用的意义；另一方面，掌握了研究平面运动的理论和方法后，就可以处理更复杂的运动，因此它是研究刚体复杂运动的基础。

如果在参考系中，可以找到一个固定平面 I，使得刚体在运动过程中，刚体内任何一点 M 保持与平面 I 的距离不变，也就是说 M 点始终在一个平行于 I 的平面 II 内运动（图3.12），则称刚体作**平面平行运动**，简称**平面运动**。这样，平面 II 在刚体上截出的截面 S 在运动过程中就一直保持在平面 II 内。根据平面运动的定义不难知道，刚体内任意一条垂直于固定平面 I 的直线上的点有相同的位移（可以根据刚体上两点间距离不变这一性质用反证法证明）。因此，这条直线上每一点的速度与加速度都是相同的。由此可知，任意一个平行于固定平面 I 的平面 II 或 III，或 IV 等（在图3.12 中只画了 II），分别将

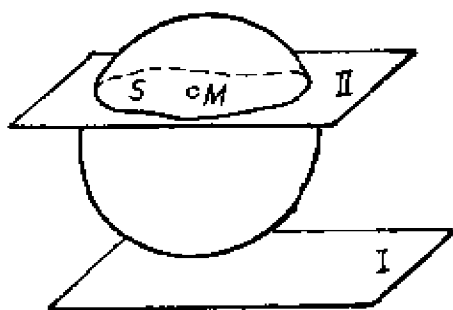


图3.12 平面运动

刚体截出一个平面图形，它们的运动是完全相似的（它们在各自的平面内运动，对应点的轨迹、速度和加速度完全相同）。因此，对刚体平面运动的研究，就化成对一个平截面 S 在其自身平面内运动的研究。S 的运动代表了刚体的运动，我们就把它认为是刚体。

＊＊＊　上节图3.1中浪木的运动是不是平面运动？转动的门窗是否作平面运动？凡是平动都是平面运动吗？定轴转动都是平面运动吗？在平面上沿直线前进的汽车，车身与车轮各是平面运动吗？汽车作圆周转弯时，又怎样？＊＊＊

在平面Ⅱ上取一固定坐标架 $[A, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}]$，在刚体上任选一点 O，称作**基点**，按上固连坐标架 $[O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$。因此，刚体的运动就相当于坐标架 $[O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$ 相对坐标架 $[A, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}]$ 的运动。为了确定刚体的位置，只要给出三个量：O 点在 $[A, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}]$ 中的坐标 x_0，y_0 以及 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{i}$ 之间的夹角 φ，这三个量在刚体运动过程中都是时间 t 的函数

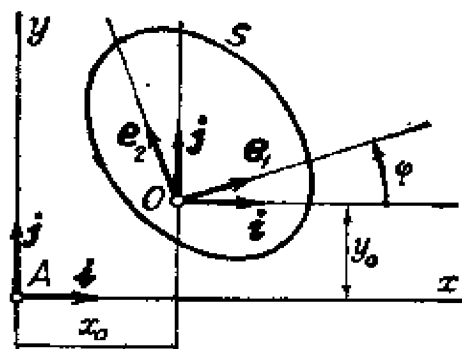


图3.13　固定、固连和平动参考系

$$x_O = x_O(t), \quad y_O = y_O(t), \quad \varphi = \varphi(t).$$

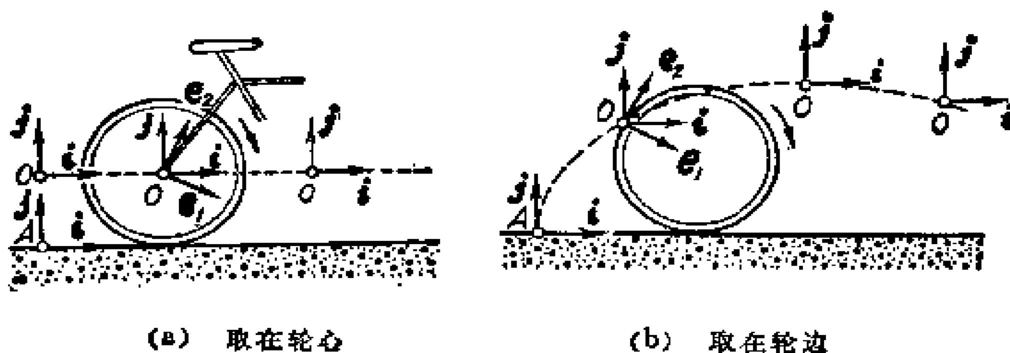
这就是作平面运动的刚体的运动方程，一共有三个独立的变量，说明作平面运动的刚体有三个自由度。

为了研究平面运动，除以上固定坐标和固连坐标以外，我们再引入一个中间坐标架 $[O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}]$，它的原点就是固连坐标架的原点，即基点 O，它的基向量取得与固定坐标架的基向量一致，称之为**平动坐标架**（图3.13）。

这个平动坐标架具有双重身分。一方面，我们可以把它看成是一个刚体，说确切一点，我们假想平动坐标架 $[O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}]$ 与一个无限延伸的平面固连在一起，这个平面是一个刚体（以平动标

架为其代表)。根据平动的定义，立刻可以断定，对于参考系 $[A, i, j]$ 来说这个刚体的运动是平动。又根据平动的性质，刚体上任意点的速度、加速度均相等，我们选取基点 O 的速度 v_O 和加速度 a_O 为代表，即平动坐标架的每一点的速度、加速度与基点的速度、加速度一致。另一方面，我们又可以把平动标架看成是一个参考系，说确切一点，我们假想与平动坐标架 $[O, i, j]$ 固连的整个空间是一个参考系，称作**平动参考系**。在2-1中曾经指出过，有时候也可能只有参考系，而不一定有参考体，平动参考系就属于这种情形。对于平动参考系而言，被我们研究的刚体是作定轴转动，固定轴垂直于运动平面并通过基点 O，以后我们简单地说是绕基点 O 转动。关于平动坐标架双重身份的说明，就把刚体的平面运动分解成两部分：刚体对平动参考系作定轴转动，平动参考系对固定参考系作平动。简单地说就是平面运动相当于平动加定轴转动。

为了具体地说明以上的结论，我们考虑自行车车轮沿直线滚动的情形(图3.14(a))。



(a) 取在轮心　　　　(b) 取在轮边

图3.14　自行车轮轴装在哪里？

固定坐标架 $[A, i, j]$ 是取在地面上的，固连坐标架装在车轮(刚体)上，例如可以把基点 O 选在轮心，e_1, e_2 为沿某两条相互垂直的半径。那么平动坐标架 $[O, i, j]$ 就可以理解为装在自行车车架上的一个坐标系(原点必须是选定的基点)。将自行车架作为

刚体来看，它相对地面作的是平动。若将自行车架作为参考系，则车轮相对于它作的是定轴转动，即从骑在自行车上的观察者看，车轮作定轴转动。

基点的问题值得注意。前面说过，在刚体上任选一点O作为基点，现在在自行车轮上我们也来任选。比如说选车轮边缘上一点为基点O，然后把这一点当作轴而将车架接装上去（图3.14(b)）。此时，车架仍然作平动，而车轮相对于它还是作定轴转动。这种别开生面的自行车在实际生活中当然是不可取的。但是，从理论分析的角度看，我们没有理由对选取哪一个点作为基点有所"偏爱"，选取完全是任意的。即使把基点选在车轮边上，也同样地能把平面运动分解为平动和转动两部分（为什么？）。显然，基点选择不同，刚体的平动速度和加速度也就不同，然而读者将会看到，刚体的转动特征量却与基点选择无关。当然，在具体计算时，对于基点还是要仔细选择，尽量使计算步骤得到简化。例如将轮心选作基点，一般说来计算总要方便一些。

现在利用运动合成的方法来推演刚体上点的速度和加速度。刚体S上任一点M，在$[A,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}]$中的向径是$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{AM}$，在$[O,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$中的向径是

$$\boldsymbol{r}'=\overrightarrow{OM}=\xi\boldsymbol{e}_1+\eta\boldsymbol{e}_2,$$

其中坐标ξ，η是常量。由图3.15①可知

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{AO}+\boldsymbol{r}'.$$

将上式对时间t求一次导数得M点的速度

$$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{d}{dt}(\overrightarrow{AO})+\dot{\boldsymbol{r}}'.$$

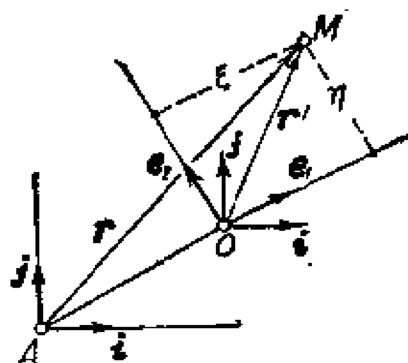


图3.15　平面运动公式的推导

① 单位基向量$\boldsymbol{k}$和$\boldsymbol{e}_3$在图中均未画出，在向量基中也未写上，但应该理解向量基是三维的正交单位向量基，并且$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2$。

式中第一部分是基点O的速度 $\boldsymbol{v}_O$，也是平动坐标架中任一点的速度。我们又可以这样解释这个速度，即假想在所考虑的时刻，刚体上的M点被"粘连"或"冻结"在平动参考系上，被"牵连"或"拖带"着一起运动，这时M点的速度就是基点O的速度 $\boldsymbol{v}_O$，称为**牵连速度**。式中第二部分正好是上节定轴转动中所推演的点的速度(这里的 $\boldsymbol{r}'$ 相当于式(3.8)中的 $\boldsymbol{r}$)，即 $\dot{\boldsymbol{r}}'=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'$，它表示 M点相对于平动参考系$[O,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$的速度，称为**相对速度**，其中 $\boldsymbol{\omega}=\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3$ 是刚体在平动参考系中的角速度向量。最后得出**速度分布公式**：

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_O+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'. \tag{3.10}$$

上式说明平面运动刚体上任意点的速度等于牵连速度和相对速度的向量和。当然，牵连速度是由于刚体的平动引起的，相对速度是由于刚体的转动引起的。今后在不致发生误会的地方，式(3.10)中的 $\boldsymbol{r}'$ 简写成 $\boldsymbol{r}$。

在上面的推导中，用到了 $\boldsymbol{\omega}=\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3$，$\varphi$ 是 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{i}$ 的夹角。如果选取的固连坐标系不是 $[O,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$，而是另一个面连坐标 $[O^*,\boldsymbol{e}_1^*,\boldsymbol{e}_2^*]$ (图3.16)，那么式(3.10)应改写为

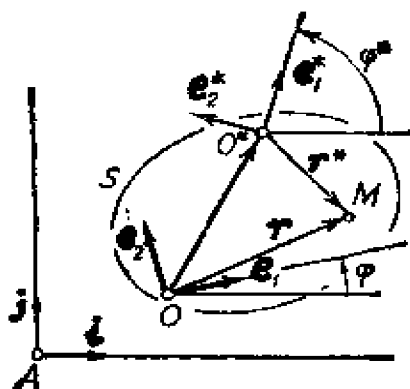


图3.16 固连系可以随便选吗？

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_{O^*}+\boldsymbol{\omega}^*\times\boldsymbol{r}^*, \tag{3.11}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}^*=\dot{\varphi}^*\boldsymbol{e}_3^*$。由于 $\boldsymbol{e}_3^*=\boldsymbol{e}_3$，故 $\boldsymbol{\omega}^*$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 平行。

根据式(3.10)，新基点O^*的速度是

$$\boldsymbol{v}_{O^*}=\boldsymbol{v}_O+\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{OO^*}. \tag{3.12}$$

将式(3.12)代入式(3.11)，并与式(3.10)进行比较，得

$$\boldsymbol{\omega}^*\times\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{r}-\overrightarrow{OO^*}).$$

由图 3.16，不难看出 $\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}-\overrightarrow{OO^*}$，所以

$$(\boldsymbol{\omega}^*-\boldsymbol{\omega})\times\boldsymbol{r}^*=0.$$

因为 $(\boldsymbol{\omega}^*-\boldsymbol{\omega})$ 与 $\boldsymbol{r}^*$ 互相垂直，O^* 可以任意选取，即 $\boldsymbol{r}^*$ 是任意的，所以

$$\boldsymbol{\omega}^*=\boldsymbol{\omega}.$$

这就是说，尽管基点选得不同，固连标架的方向选得不同，但刚体相对于任意一个平动参考系的角速度都是相同的。所以今后在谈到刚体平面运动的角速度时，可以不管相对于哪一个基点的平动参考系，笼统地说平面运动的角速度就可以了。与定轴转动情况相似，平面运动的角速度也是刻划刚体整体运动的特征量。

* * *　以图3.14(a)和(b)中的自行车为例，分析当基点改变以后，平动速度是怎样改变的？怎样从直观上理解角速度是不变的？ * * *

例3.1　分析滚动车轮上各点的速度，已知轮心的速度为 u，轮子作纯滚动。

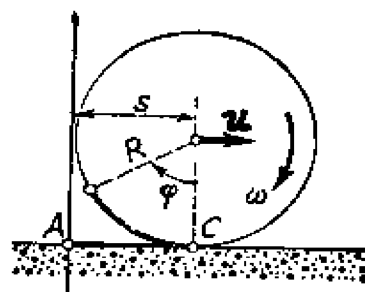


图3.17　滚动车轮

解　因为轮子作纯滚动，即轮与地面之间无相对滑动，所以有

$$S=R\varphi.$$

S 为轮心的位移，R 为轮半径，φ 是任一半径的转角(图3.17)。上式对时间 t 求导，得 $\dot{S}=R\dot{\varphi}$ 或取绝对值，$|\dot{S}|=u$，$|\dot{\varphi}|=\omega$，故有

$$u=R\omega.$$

此式说明，**纯滚动时，轮心速度等于半径乘以角速度**(这个关系今后还要多次用到)。

利用式(3.10)，可以求出轮子上任意点的速度。现在取轮心 O 为基点，各点的平动速度都是 u (图3.18(a))，转动速度分布如图 3.18(b) 所示。合起来得到滚轮上各点的速度，如图 3.18(c)

所示。图中几个特殊点B，C，D和E的速度大小分别为

$$v_E=2u,\ v_B=v_D=\sqrt{2}u,\ v_C=0。$$ ▌

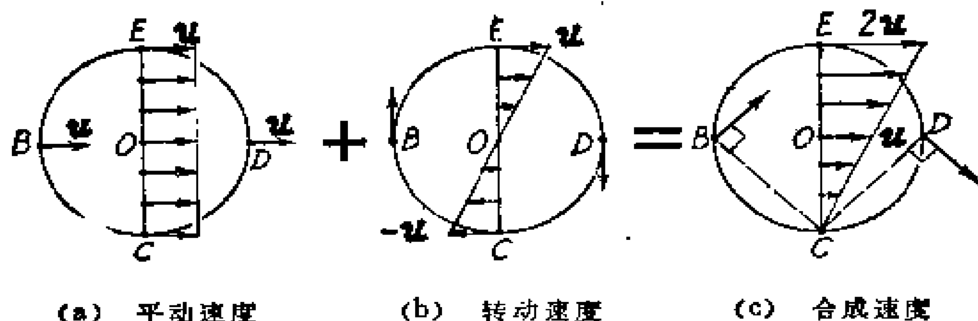


图3.18 滚轮上各点的速度

例3.2 求证：平面运动的刚体上任意两点A和B（图3.19）的速度在两点连线上的投影相等。

解 取A为基点。根据式(3.10)，B点的速度为

$$\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{AB}。$$

在$\overrightarrow{AB}$方向取一单位向量，记作$\boldsymbol{l}^0$。因为向量$\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AB}$垂直，即与$\boldsymbol{l}^0$的点积为零。所以上式两边点乘单位向量$\boldsymbol{l}^0$，便得本题的结论

$$\boldsymbol{v}_B\cdot\boldsymbol{l}^0=\boldsymbol{v}_A\cdot\boldsymbol{l}^0。$$

在求解具体问题时，这一结论经常会被用到，有的书上还把它当作一个定理来看待。▌

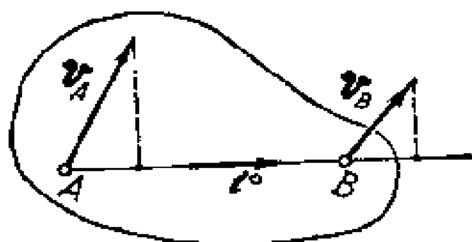


图3.19 两点速度在连线上的投影相等

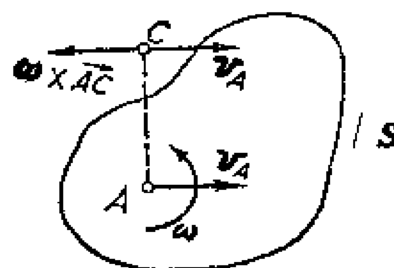


图3.20 瞬心在哪里?

考虑某一瞬时t，如果刚体在此时的角速度ω不等于零，那么平面刚体上一定有一点，它的瞬时速度等于零。这样的点叫做

刚体的**速度瞬心**。证明如下：

设刚体上某一点 A 的速度为 v_A，过 A 点将 v_A 顺着 ω 的指向转过 90°，得垂线 AC（图 3.20），并取

$$\overline{AC}=\frac{v_A}{\omega},$$

则刚体上的 C 点（如 C 点落在平面刚体 S 以外，可以认为 C 点在 S 的延拓部分上）的速度是

$$v_C=v_A\omega+\times\ \overrightarrow{AC}.$$

但是 $\omega\times\overrightarrow{AC}$ 的方向正好与 v_A 相反，而

$$|\omega\times\overrightarrow{AC}|=v_A,$$

所以有 $v_C=0$。这就证明了速度瞬心的存在。

如果将速度瞬心取作基点，那么在此瞬时平面刚体上任一点 M 的速度是

$$v=v_C+\omega\times\overrightarrow{CM}=\omega\times\overrightarrow{CM}.$$

这个结果和绕定轴转动时点的速度公式（3.8）是一样的。就是说，在计算速度分布时，可以将平面刚体看成是绕速度瞬心 C（过此点并垂直于平面的轴）的定轴转动（图3.21）。从这个意义上讲，速度瞬心也就是**瞬时转动中心**，简称**瞬心**。

每一时刻瞬心所在的位置，并不是刚体上的固定点，它只是反映了平面运动的如下特性：在每一瞬时，刚体好象是定轴转动，时刻不同，转轴也不同，而从整个过程看，它并不是定轴转动。或者反过来说，可以把定轴转动看作是瞬心不变的平面运动。

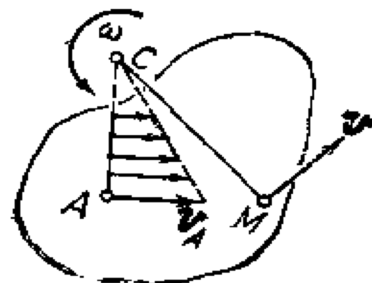
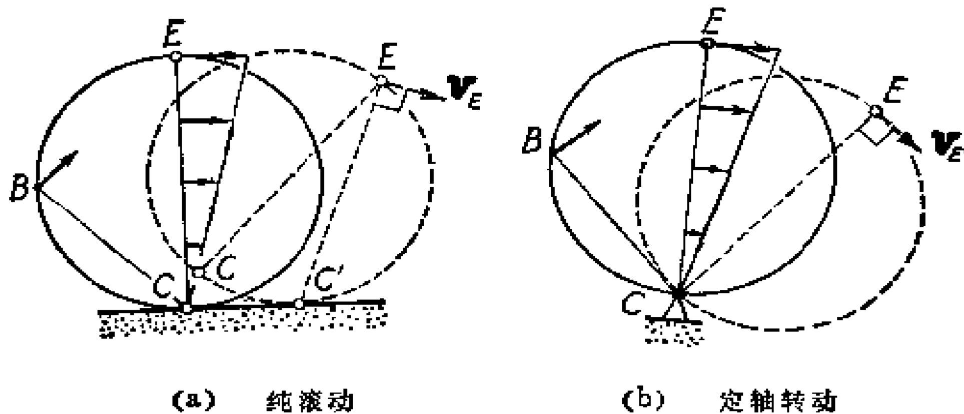


图3.21 用瞬心求速度

例3.3 以例 3.1 中的滚轮为例，分析平面运动与定轴转动的异同。

解 由例 3.1 知，在作纯滚动的轮子上，与地面接触的那一

点C的速度为零，即C点为瞬心。取它为基点，则平动部分速度为零，轮上的速度分布如图3.22(a)所示(与图3.18对比)。



(a) 纯滚动　　(b) 定轴转动

图3.22　绕瞬心转动与绕定轴转动的异同

我们考虑另外一个相同的轮子，用钉子将C点固定住(轮子可以绕钉子转动)，那么速度分布如图3.22(b)所示。当然，在此瞬时(a)和(b)两种情况的速度分布(图中实线所示)是完全相同的。

现在考虑另一个瞬时的速度分布(图中虚线所示)，情况就完全不同了。特别要注意的是，在刚体上刚才和C重合的那个点现在的速度是什么？E的速度v_E在两种情况下有什么差别？ ‖

我们考虑刚体上各点的加速度，将速度分布公式(3.10)对时间t求导，得

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}_O}{dt}+\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}),$$

式中右端第一项是基点O的加速度$\boldsymbol{a}_O$，即为平动加速度；第二项为转动加速度，我们可以利用定轴转动中的公式(3.9)。最后即得加速度分布公式：

$$\boxed{\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_O+\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}).} \tag{3.13}$$

此式说明平面运动的刚体上任意点的加速度由两部分合成：一部分是假想该点“冻结”在平动参考系上的**牵连加速度**(与基点加速度相同)；另一部分是该点在平动参考系中作定轴转动时

的相对加速度。

例3.4 设例 3.1 中轮子滚动时，轮心速度是常向量 $\boldsymbol{u}$，求瞬心（刚体上的点）的加速度。

解 取轮心 O 为基点，则平动加速度 $\boldsymbol{a}_O=0$，角速度 $\dot{\varphi}=u/R$ = 常量，所以角加速度为零。因此，由式(3.13)，加速度中的三部分只有向心的那一部分（向哪一个心？轮心还是瞬心？）$\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$ 不为零，其大小为 $R\omega^2$。 ▌

*** 是否可以选取瞬心 C 点为基点，求出瞬心的加速度？***

例3.5 梯子的滑动。梯子 AB 长 l，一端靠在墙上（图3.23）。如将梯子下端 A 以等速 u 向右水平地拖动。求当梯子与墙的夹角 $\varphi=30°$ 时，B 点的加速度和杆的角加速度，并用 l 及 u 表示。

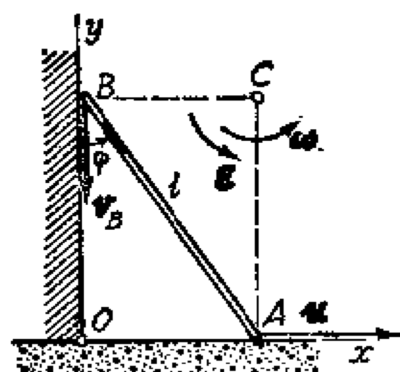


图3.23 梯子的滑动

解 用两种方法解，以便比较。

第一种方法。设 $\varphi=\varphi(t)$，$OB=y=y(t)$。由题意可设 $OA=x=ut$，于是有

$$y=\sqrt{l^2-u^2t^2}, \quad \varphi=\arcsin\frac{ut}{l}.$$

当然，这两式只在条件 $0\leqslant t\leqslant l/u$ 成立时适用。

为了求出 $\dot{y}$，$\ddot{y}$，可以将 y 对时间 t 直接求导，也可以对 y^2 求导。因为 $y^2=l^2-u^2t^2$，对 t 求一次导数得

$$y\dot{y}=-u^2t.$$

再求一次导数，得

$$\dot{y}^2+y\ddot{y}=-u^2.$$

于是有

$$\dot{y}=-\frac{u^2t}{y}=-\frac{u^2t}{(l^2-u^2t^2)^{1/2}},$$

$$\ddot{y}=-\frac{u^2+\dot{y}^2}{y}=-\frac{l^2u^2}{(l^2-u^2t^2)^{3/2}}.$$

同理可以算出

$$\dot{\varphi}=\frac{u}{(l^2-u^2t^2)^{1/2}},\quad \ddot{\varphi}=\frac{u^3t}{(l^2-u^2t^2)^{3/2}}.$$

再以 $t=\frac{l}{u}\sin\varphi$ 代入，得

$$\ddot{y}=-\frac{u^2}{l}\sec^3\varphi,\quad \ddot{\varphi}=\frac{u^2}{l^2}\sin\varphi\sec^3\varphi.$$

以 $\varphi=30^\circ$ 代入，最后得

$$a_B=-8u^2/(3\sqrt{3}\,l),\quad \varepsilon=4u^2/(3\sqrt{3}\,l^2).$$

a_B 前的负号表示加速度向下，ε 是正的，故角加速度是逆时针方向的。

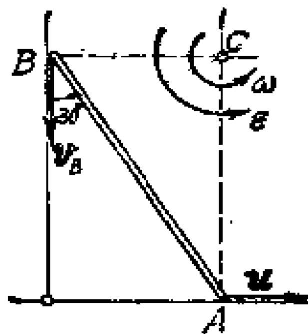


图3.24 梯子的瞬心

第二种方法。根据刚体平面运动的性质求解。因为 A 点速度是水平的，B 点速度是竖直的，梯子的瞬心 C 必定在过 A 点的垂线与过 B 点的水平线的交点上(图3.24，为什么？)。取瞬心 C 为基点，根据速度分布公式有

$$u=\omega\cdot\overline{AC}=\omega l\cos\varphi.$$

将 $\varphi=30^\circ$ 代入得

$$\omega=2u/\sqrt{3}\,l,$$

方向为逆时针。

再以 A 点为基点，因 $a_A=0$，故 B 点的加速度 $\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{a}_\tau+\boldsymbol{a}_n$，只有两部分不为零。转动的切向加度速 $\boldsymbol{a}_\tau$（看成 B 点绕 A 转）的大小为 $l\varepsilon$，且垂直于 BA(指向未定，因为 ε 还未知)。法向

加速度 a_n，其大小为

$$a_n=\omega^2\overline{AB}=4u^2/3l,$$

方向由 B 指向 A。a_B总是垂直地面的，但指向尚不知。将 a_τ，a_n 与 a_B 之间的关系画成向量图（图3.25），就可以确定 a_B 与 a_τ 的指向，并且可得其大小为

$$a_B=\frac{4u^2}{3l}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{8u^2}{3\sqrt{3}\,l},$$

$$a_\tau=\frac{4u^2}{3l}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{4u^2}{3\sqrt{3}\,l}.$$

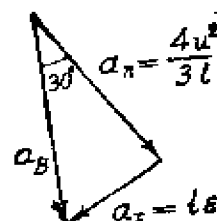


图3.25 加速度的合成

由此可得

$$\varepsilon=\frac{a_\tau}{l}=\frac{4u^2}{3\sqrt{3}\,l^2},$$

其方向为逆时针。▌

上例中两种方法所得的结果当然是完全一样的。从方法的特点来看，前者用了求导数运算，而后者却完全没有用求导运算。为什么会有这样的差别呢？原来向径、速度、加速度、角速度和角加速度这些量都是时间的函数，它们之间的内在联系必须从它们的变化过程中才能说清楚。第一种方法，先列出在任意时刻即整个过程中 x，y 和 φ 这些量之间的关系，故可以对 t 求导数，以后再以特殊时刻的 $\varphi=30°$ 代入，以求得题目要求的瞬时值。在第二种方法中，应用 v 和 a 的公式(3.10)和(3.13)，它们是用求导方法推导出来的，即在公式推导过程中已经考虑了整个时间过程，而公式一经导出，我们就可以把它当作瞬时性的关系式看待，它给出了各个运动量的瞬时值之间的关系。借用第二章一开头所说电影胶卷的比喻，就是在一串胶卷中某一张上（每一张都是这样）凝固住各个变化着的运动量的瞬时值之间的关系。式(3.10)和(3.13)充分体现了微分学怎样被用来反映机械运动的"既动又不动"的基本矛盾。

定瞬心线和动瞬心线

前面已经讲过随着时间的变化，瞬心的位置是要改变的。下面以滚动的轮子为例来讨论瞬心 C 位置的变化（图3.26）。

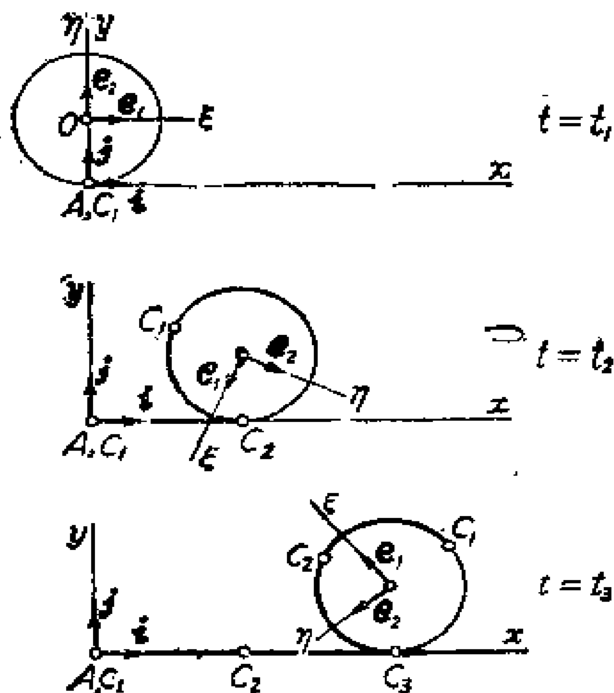


图3.26 瞬心的变化

图中分别表示在三个不同时刻 $t_1<t_2<t_3$ 轮子的位置，对应的瞬心分别是 C_1, C_2, C_3。在固定参考系 $[A, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}]$ 中看，瞬心变化时的轨迹 $C_1C_2C_3\cdots\cdots$ 就是 Ax 轴，其方程为

$$y_C=0.$$

瞬心在固定系（或相对固定空间）中的轨迹，叫做**定瞬心线**或**空间极迹**。

取刚体上的固连坐标架 $[O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]$，在这个参考系中看瞬心变化的轨迹 $C_1C_2C_3\cdots$ 就是轮子边缘的圆周，其方程是

$$\xi_C^2+\eta_C^2=R^2.$$

瞬心在固连参考系（或相对于刚体本身）中的轨迹叫做**动瞬心线**或**本体极迹**。

如果把定瞬心线和动瞬心线分别假想成某个刚体的边缘，由于这两个"刚体"在接触点处的相对速度为零，那么刚体的平面运动好象是动瞬心线刚体在定瞬心线刚体上作纯滚动。

例3.6 一直角曲尺 ABE 在平面 Oxy 内运动，A 端通过一滑块套在 Ox 轴上，使 A 点可在此轴上自由滑动。在 Oy 轴上的固

定点D处装一小环，曲尺臂BE穿过此小环可以自由滑动（图3.27）。设$AB=OD=a$。求定瞬心线和动瞬心线的方程。

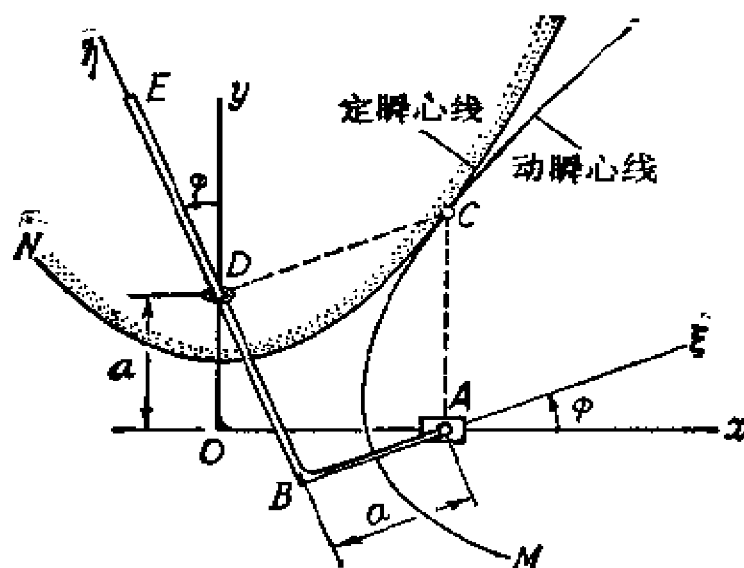


图3.27 直角曲尺的瞬心线

解 取固连在曲尺上的坐标系$[B,e_1,e_2]$，e_1（ξ轴）沿BA，e_2（η轴）沿BE。在任意瞬时A点的速度沿x轴，故瞬心应在过A点与x轴垂直的直线AC上。BE臂上与D点重合的那个点的速度v_D总是沿着BE方向（为什么？）。所以，瞬心又应在过D并与BE垂直的直线DC上。这样，瞬心就是AC与DC的交点C。

利用三角形关系，容易求出

$$\overline{BD}=\overline{OA}=a(\operatorname{tg}\varphi+\sec\varphi),$$

因而瞬心C在Oxy中的坐标为

$$\begin{cases}x=\overline{OA}=a(\operatorname{tg}\varphi+\sec\varphi),\\ y=\overline{AC}=\overline{BD}\sec\varphi=\overline{OA}\sec\varphi=x\sec\varphi.\end{cases}$$

从中消去φ，便得出定瞬心线CN的方程为

$$x^2=a(2y-a).$$

瞬心C在$O\xi\eta$中的坐标为

$$\begin{cases}\xi=\overline{CD}=\eta\sec\varphi,\\ \eta=\overline{BD}=a(\operatorname{tg}\varphi+\sec\varphi).\end{cases}$$

从中消去φ，便得动瞬心线CM的方程为

$$\eta^2=a(2\xi-a).$$

两条瞬心线都是抛物线。所以，曲尺的运动好象是由于抛物线CM在另一个固定的抛物线CN上作纯滚动时所造成的。读者可以在透明纸上画出动瞬心线CM(把直角曲尺也画在上面)，在另一张不透明纸上画上定瞬心线CN(Oxy标架也画上)，然后将透明纸放在不透明纸上，并使动瞬心线沿着定瞬心线作纯滚动，以验证这个结论。▌

3-3 刚体的定点运动

设刚体或者其延拓部分上有一固定不动的点，则刚体的运动称为**定点运动**。一个轮子沿圆弧形水平轨道滚动(图3.28(a))，轮子平面保持竖直，轮子中心E的轨迹是个圆，这个圆的中心O

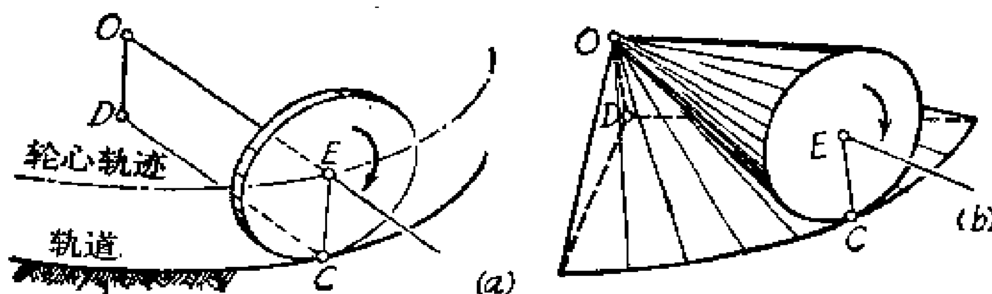


图3.28 刚体的定点运动

就是一个固定点。这种情况的固定点并不在刚体上，而在其延拓部分上。可以把此刚体延拓成为一个以轮面为底，OE为高的正圆锥体(图3.28(b))。所以，轮子的滚动等价于这个圆锥体在另一

个固定圆锥体上的滚动，而锥顶O是固定点。

在固定参考系中取固定正交坐标系$[O,\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3]$，即$Oxyz$，其中O为刚体上的固定点。再在刚体上取固连正交坐标系$[O,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$，即$O\xi\eta\zeta$（图3.29）。

设固连坐标系的单位向量基e与固定坐标系的单位向量基之间的方向余弦表为：

	$\boldsymbol{e}_1$或ξ轴	$\boldsymbol{e}_2$或η轴	$\boldsymbol{e}_3$或ζ轴
$\boldsymbol{i}_1$或x轴	Q_{11}	Q_{12}	Q_{13}
$\boldsymbol{i}_2$或y轴	Q_{21}	Q_{22}	Q_{23}
$\boldsymbol{i}_3$或z轴	Q_{31}	Q_{32}	Q_{33}

即$Q_{ij}=\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{i}_i\quad(i,j=1,2,3)$。

矩阵$\mathbf{Q}=[Q_{ij}]$是一个正交矩阵，即

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}=\mathbf{I}.$$

固连基$\mathbf{e}=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$与固定基$\mathbf{i}=[\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3]$之间的变换关系为

$$\mathbf{e}=\mathbf{i}\,\mathbf{Q},\qquad(3.14)$$

或者

$$\mathbf{i}=\mathbf{e}\mathbf{Q}^{-1}=\mathbf{e}\mathbf{Q}^T.\qquad(3.15)$$

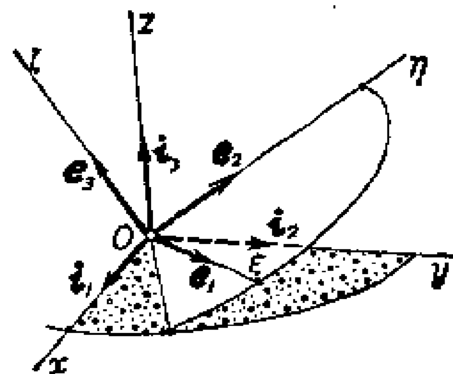


图3.29　固定系与固连系

设刚体上任意点M在固定系中的坐标列阵为$\mathbf{x}^i=[x_1,x_2,x_3]^T$，即$[x,y,z]^T$；在固连系中的坐标列阵为$\boldsymbol{\xi}^e=[\xi_1,\xi_2,\xi_3]^T$，即$[\xi,\eta,\zeta]^T$。因此向径$\boldsymbol{r}$在e中的表达式为

$$\boldsymbol{r}=\mathbf{e}\boldsymbol{\xi}^e.\qquad(3.16)$$

将式(3.14)代入式(3.16)得

$$\boldsymbol{r}=\mathbf{i}\mathbf{Q}\boldsymbol{\xi}^{e}. \tag{3.17}$$

因为 $\mathbf{i}$ 的每个元素是常向量，$\boldsymbol{\xi}^{e}$ 的每个元素是常量，所以将式(3.17)对时间 t 求一次导数，得

$$\boldsymbol{v}=\mathbf{i}\dot{\mathbf{Q}}\boldsymbol{\xi}^{e}, \tag{3.18}$$

其中 $\dot{\mathbf{Q}}=\frac{d}{dt}\mathbf{Q}$，对矩阵求导数，就是对矩阵中每一个元素求导数。

将式(3.15)代入式(3.18)，得

$$\boldsymbol{v}=\mathbf{e}\mathbf{Q}^{T}\dot{\mathbf{Q}}\boldsymbol{\xi}^{e} \tag{3.19}$$

我们来研究矩阵 $\mathbf{Q}^{T}\dot{\mathbf{Q}}$。因为 $\mathbf{Q}$ 是正交矩阵，即 $\mathbf{Q}^{T}\mathbf{Q}=\mathbf{I}$。将它对时间 t 求一次导数应为零矩阵，即

$$0=\frac{d}{dt}[\mathbf{Q}^{T}\mathbf{Q}]=\mathbf{Q}^{T}\dot{\mathbf{Q}}+\dot{\mathbf{Q}}^{T}\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^{T}\dot{\mathbf{Q}}+[\mathbf{Q}^{T}\dot{\mathbf{Q}}]^{T}.$$

这个式子说明，矩阵 $\mathbf{Q}^{T}\dot{\mathbf{Q}}$ 与其自身的转置矩阵之和为零矩阵。所以，$\mathbf{Q}^{T}\dot{\mathbf{Q}}$ 是一个反对称矩阵，它的对角线元素一定是零，而非对角线元素有关系式 $[\mathbf{Q}^{T}\dot{\mathbf{Q}}]_{ij}+[\mathbf{Q}^{T}\dot{\mathbf{Q}}]_{ji}=0$ $(i,j=1,2,3)$。于是我们可以把它写成如下的形式①

$$\mathbf{Q}^{T}\dot{\mathbf{Q}}=\begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.20}$$

其中

$$\omega_1=[\mathbf{Q}^{T}\dot{\mathbf{Q}}]_{32}=-[\mathbf{Q}^{T}\dot{\mathbf{Q}}]_{23},$$

$$\omega_2=[\mathbf{Q}^{T}\dot{\mathbf{Q}}]_{13}=-[\mathbf{Q}^{T}\dot{\mathbf{Q}}]_{31},$$

$$\omega_3=[\mathbf{Q}^{T}\dot{\mathbf{Q}}]_{21}=-[\mathbf{Q}^{T}\dot{\mathbf{Q}}]_{12}.$$

---

① 反对称矩阵只有三个量是独立的，我们引用三个量 ω_1，ω_2 与 ω_3 是很自然的。但是为什么恰巧写成这样的形式，而不把 ω_1 与 ω_2 的位置对换一下，这完全是为了使以后的答案整齐起见，不这样做当然也是可以的。

这个矩阵称为**角速度矩阵**。于是我们就得以下重要结论：

角速度矩阵是一个反对称矩阵，它等于变换矩阵的转置和它对时间的导数的乘积，而变换矩阵由固连基各方向余弦组成。

因此，式(3.19)便可写成

$$\boldsymbol{v}=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]\begin{bmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{bmatrix}$$

$$=(\omega_2\xi_3-\omega_3\xi_2)\boldsymbol{e}_1+(\omega_3\xi_1-\omega_1\xi_3)\boldsymbol{e}_2+(\omega_1\xi_2-\omega_2\xi_1)\boldsymbol{e}_3. \tag{3.21}$$

每一个反对称矩阵最多只有三个独立的非零元素，因此可以引进一个以这三个元素（添上适当的正负号）作为分量的向量，这个向量叫做反对称矩阵的**相伴向量**。对于角速度矩阵$\mathbf{Q}^T\dot{\mathbf{Q}}$，我们引进相伴向量$\boldsymbol{\omega}$如下：取矩阵中元素$\omega_1,\omega_2$和$\omega_3$为分量，组成

$$\boldsymbol{\omega}=\omega_1\boldsymbol{e}_1+\omega_2\boldsymbol{e}_2+\omega_3\boldsymbol{e}_3,$$

那么$\boldsymbol{\omega}$和$\boldsymbol{r}=\mathbf{e}\boldsymbol{\xi}^r$的叉积是

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3\\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3\end{vmatrix}.$$

上述行列式展开后与式(3.21)完全相同，因此，式(3.21)可表成

$$\boxed{\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}.} \tag{3.22}$$

这就是以向量形式表出的速度分布公式，它与矩阵形式表出的速度分布公式(3.21)等价。我们把角速度矩阵$\mathbf{Q}^T\dot{\mathbf{Q}}$的相伴向量$\boldsymbol{\omega}$叫做刚体的**角速度向量**。式(3.22)与定轴转动中的速度分布公式(3.8)在形式上是完全相同的。很明显，刚体的定轴转动（至少有两个点不动）当然应该是定点运动（有一个点不动）的特殊情形。但是两者之间有一个根本性的差别。在定轴转动的刚体上（包括其延拓部分），确实有一根轴是不动的，刚体自始至终绕着

这根轴转动。在定点运动中，不存在这样的轴，但我们可以在某一个瞬时，经过定点作一条与角速度向量 $\boldsymbol{\omega}$ 平行的线，那么根据式(3.22)可知，刚体上位于这条直线上的所有点的速度均为零。因此，可以把这条线看成是一根转轴，然而我们立即又说这并不是一根真正的转轴，因为这根轴上的点的速度，在这一瞬时为零，在下一瞬时就不一定为零了。那时候是另外一根轴上的点的速度为零了（因为 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向是随时间变化的），即转轴在空间的位置改变了(但仍通过定点)。所以，我们称这样的转轴为**瞬时转动轴**，称 $\boldsymbol{\omega}$ 为**瞬时角速度**，意思是刚体在这一瞬时好象是绕这根轴转动，就这一瞬时而言，它与定轴转动差不多。也正是从这个意义上讲，定点运动也可以叫做**定点转动**。

前面导出角速度向量的一系列计算，仅是理论上的做法，在解决具体问题时并不需要这样做。下面我们介绍一种求算角速度向量的方法。

如果在刚体上除了固定点以外，还能找到另一点 C，它的瞬时速度等于零，那么不难证明 OC（或其延长线）上任一点的瞬时速度都是零。这就是说 OC 线是瞬时转动轴，因此 $\boldsymbol{\omega}$ 的方位就可确定。

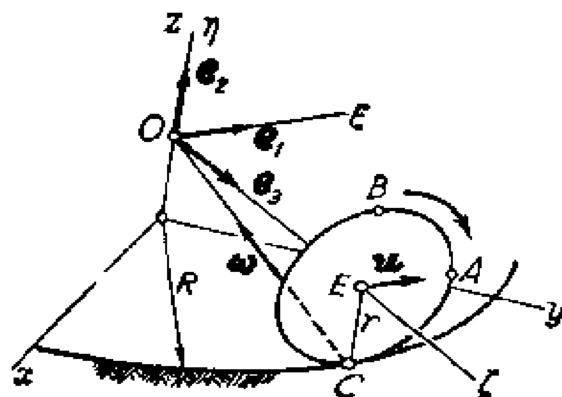


图3.30　求刚体上点的速度

例3.7　半径为 r 的车轮沿圆弧作纯滚动时（图3.30），已知轮心 E 的速度是 $\boldsymbol{u}$，轮心轨道半径是 R。求车轮上水平半径端点 A 和最高点 B 的速度。

解　轮子滚而不滑，所以接触点 C 的速度 $v_C=0$，于是 OC 就是瞬时转动轴。取固连系 $[O,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ 如图3.30，故可设 $\boldsymbol{\omega}=\omega_2\boldsymbol{e}_2-\omega_3\boldsymbol{e}_3$，而且根据图3.31所示的三角形关系，可知

$$\frac{\omega_3}{\omega_2}=\frac{R}{r}.$$



图3.31 几何关系

由 $\boldsymbol{v}_E=\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{OE}=u\boldsymbol{e}_1$，将 $\boldsymbol{\omega}$ 的关系式代入得

$(\omega_2\boldsymbol{e}_2-\omega_3\boldsymbol{e}_3)\times R\boldsymbol{e}_3=\omega_2R\boldsymbol{e}_1=u\boldsymbol{e}_1$.

由此可得

$$\omega_2=u/R,\qquad \omega_3=u/r.$$

于是

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{u}{R}\boldsymbol{e}_2-\frac{u}{r}\boldsymbol{e}_3.$$

因为 $\overrightarrow{OA}=R\boldsymbol{e}_3+r\boldsymbol{e}_1$，根据式(3.22)有

$$\boldsymbol{v}_A=\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{OA}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ 0 & \frac{u}{R} & -\frac{u}{r}\\ r & 0 & R\end{vmatrix}=u\boldsymbol{e}_1-u\boldsymbol{e}_2-\frac{r}{R}u\boldsymbol{e}_3,$$

所以 $v_A=u\sqrt{2+(r/R)^2}$。显然，$\boldsymbol{v}_A$不在轮子平面内。

同理，由$\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{OB}$，可求得 $v_B=2u$。▌

以上是求角速度向量的一种办法。当然应用变换矩阵 $\mathbf{Q}$直接算出角速度矩阵$\mathbf{Q}^T\dot{\mathbf{Q}}$以后，再写出其相伴向量（角速度向量）也是可以做到的。但一般说来，这样的计算比较冗长。为了对比，举例说明。

例3.8 求例3.7中的角速度大小。

解 取 $\mathbf{i}=[\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3]$与 $\mathbf{e}=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$如图3.32所示。注意，在图中两个坐标架的原点都没有画在真正的固定点O处，这样的取法并不影响变换矩阵中的各个元素（相应向量的方向余弦），因此不影响最后的结果。

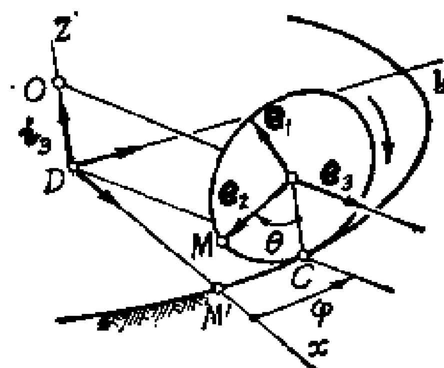


图3.32 基 i 和基 e

设$\boldsymbol{e}_3$沿车轮轴的方向，它与

Oxy 平面平行，故有

$$e_3=\cos\varphi i_1+\sin\varphi i_2.$$

将e_2先沿轮子的水平半径和竖直半径分解，再将沿水平半径方向的分向量（其大小为 $\sin\theta$）沿 x 和 y 方向分解，即得

$$e_2=\sin\theta\sin\varphi i_1-\sin\theta\cos\varphi i_2-\cos\theta i_3.$$

同理，可得

$$e_1=\cos\theta\sin\varphi i_1-\cos\theta\cos\varphi i_2+\sin\theta i_3.$$

因此变换矩阵为

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}\cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi\\ -\cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\cos\varphi & \sin\varphi\\ \sin\theta & -\cos\theta & 0\end{bmatrix}.$$

经过比较冗长的运算可得

$$\mathbf{Q}^T\dot{\mathbf{Q}}=\begin{bmatrix}0 & \dot\theta & -\dot\varphi\cos\theta\\ -\dot\theta & 0 & -\dot\varphi\sin\theta\\ \dot\varphi\cos\theta & \dot\varphi\sin\theta & 0\end{bmatrix}.$$

注意对应的角速度向量在基 e 中的分量 ω_1,ω_2 和 ω_3 分别是上述矩阵中行列数为 32,13 和 21 三个元素，故有

$$\boldsymbol{\omega}=[e_1,e_2,e_3]\begin{bmatrix}\dot\varphi\sin\theta\\ -\dot\varphi\cos\theta\\ -\dot\theta\end{bmatrix}.$$

由于轮子滚动时没有滑动，图中弧长$\overset{\frown}{CM}$ 等于 $\overset{\frown}{CM'}$，故

$$R\varphi=r\theta.$$

将上式对时间 t 求一次导数，得 $R\dot\varphi=r\dot\theta$。而 $R\dot\varphi$就是轮心E 的速度 u，代入得到 $\dot\varphi=u/R$ 和 $\dot\theta=u/r$。以此代入$\boldsymbol{\omega}$ 的表达式中得

$$\boldsymbol{\omega}=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]\begin{bmatrix}\frac{u}{R}\sin\theta\\ -\frac{u}{R}\cos\theta\\ -\frac{u}{r}\end{bmatrix}.$$

角速度向量$\boldsymbol{\omega}$关于固定系$\mathbf{i}$的表达式可以用$\mathbf{e}=\mathbf{i}\mathbf{Q}$代入上式而得到，即

$$\boldsymbol{\omega}=[\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3]\begin{bmatrix}\cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi\\ -\cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\cos\varphi & \sin\varphi\\ \sin\theta & -\cos\theta & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{u}{R}\sin\theta\\ -\frac{u}{R}\cos\theta\\ -\frac{u}{r}\end{bmatrix}$$

$$=[\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3]\begin{bmatrix}-\frac{u}{r}\cos\varphi\\ -\frac{u}{r}\sin\varphi\\ \frac{u}{R}\end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{\omega}$的大小 $\omega=\sqrt{\left(\frac{u}{r}\right)^2+\left(\frac{u}{R}\right)^2}$，所得结果与例3.7中是一样的。 ▎

将速度分布公式(3.22)对时间t求一次导数，便可得出**加速度分布公式**：

$$\boxed{\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}),} \tag{3.23}$$

其中$\boldsymbol{\varepsilon}=d\boldsymbol{\omega}/dt$是刚体的角加速度向量。式(3.23)在形式上与定轴转动中加速度分布公式(3.9)完全相同，但这里由于$\boldsymbol{\omega}$的方向是变化的，所以$\boldsymbol{\varepsilon}$不一定与$\boldsymbol{\omega}$平行。另外，与定轴转动不同，现在刚体上的点不一定作圆周运动，$\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}$不能理解为“切向”加速

度。

3 4 角速度向量、欧拉角

刚体的角速度向量是理论力学中比较难于掌握的一个概念。一个物理量，如果在数学上可以表达成一个向量，首先必须有明确的大小和方向。例如，位移、力和速度等是向量，而温度、长度和质量等就不是向量。对于角速度向量，可回顾一下 3-2 中定轴转动的情况，我们把角速度向量的大小规定为 $|\dot{\varphi}|$，方向规定为沿固定转轴，指向按右手螺旋规则确定。既然大小和方向都是确定的，那么当然就满足了作为向量的上述条件。但是角速度向量的这种规定不便于直接推广到作定点运动的刚体上。因为在定点运动中，不存在一根固定轴，所以无法简单地说出角速度向量的方向。同时，定点运动中哪一个角对应于定轴转动情形中的 φ 角，也不那么简单明确，因此再以 $|\dot{\varphi}|$ 来规定角速度向量的大小就不太合适。我们注意到矩阵表达式(3.7)和(3.21)的导出是严格的，而且式(3.7)就是式(3.21)的一种特殊情况。如果以式(3.21)为基本关系式，则定点运动与定轴转动的描述就统一起来了。我们根据角速度矩阵(3.20)式定义了与它对应的相伴向量(即角速度向量) $\boldsymbol{\omega}=\omega_1\boldsymbol{e}_1+\omega_2\boldsymbol{e}_2+\omega_3\boldsymbol{e}_3$，显然它的大小和方向都是明确的。因此，这样定义的角速度满足作为向量的上述条件。下面我们对定点运动刚体的角速度向量给予一个直观的几何说明。

刚体作定点运动时，它与一个球面（取任意方便的距离为半径）的截面 S 将保持在球面上(图3.33(a))，所以截面 S 的运动可以代表刚体的运动。这一点和平面运动(图3.12)是很相仿的。其实，如果设想球心在无穷远处，那么球面运动将成为平面运动，平面运动是定点运动的极限情况。

设在 Δt 时间间隔以后，S 运动到 S'(图3.33(b))，S 中的大圆弧段 AB 运动到 $A'B'$。作 AA' 的垂直平分面和 BB' 的垂直平

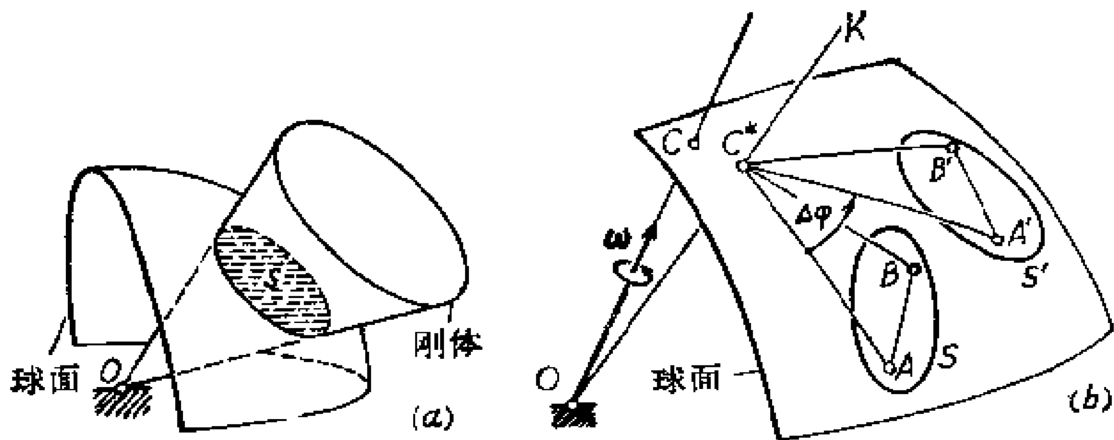


图3.33　定点运动情况下角速度向量ω的几何解释

分面(图中未画出)，这两个平面的交线是OK。于是球面三角形C^*AB和$C^*A'B'$全同，其中C^*是OK线与球面的交点。所以刚体在有限时间内的运动就是绕OC^*轴转动了角度$\Delta\varphi$（等于球面角AC^*A'）。当时间间隔Δt趋于零时，OC^*的极限位置OC就是瞬时转动轴，亦即角速度向量$\boldsymbol{\omega}$的方向，而$\boldsymbol{\omega}$的大小则等于$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta\varphi/\Delta t$。我们也可以完全由这种几何角度来定义定点运动的角速度向量，这和由分析方法通过角速度矩阵$\mathbf{Q}^T\dot{\mathbf{Q}}$引出的角速度向量是一致的。这里证明从略。

向量除了必须有大小、方向外，还必须满足平行四边形加法法则。例如，一个点作位移$\boldsymbol{r}_1$，再作位移$\boldsymbol{r}_2$，那么结果是按平行四边形法则相加为$\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2$，因而也满足交换律，即

$$\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1.$$

有的物理量虽然有明确的大小和方向，但并不满足这个条件，这种量就不是向量。例如刚体绕一根轴转过一个角度θ，我们暂且用向量符号$\boldsymbol{\theta}$来表示它，其大小就是这个角度的绝对值$|\theta|$，方位沿转轴，指向由θ的正负号按右手螺旋规则确定。这样定义出来的$\boldsymbol{\theta}$并不满足平行四边形加法法则，这只要看一个实例就清楚了。设有一块三角板，初始位置如图3.34(a)所示。将它

先绕 x 轴转动90°，即把角位移取成 $\boldsymbol{\theta}_1=\frac{\pi}{2}\boldsymbol{i}$，成为图 3.34(b)

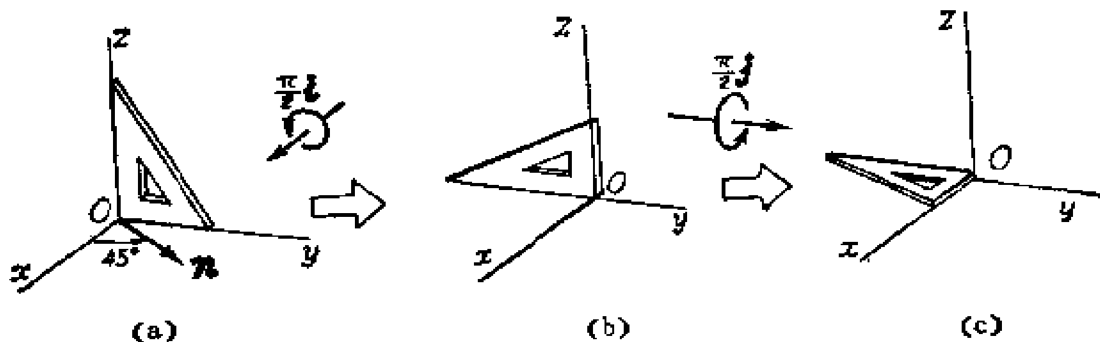


图3.34　有限角位移不是向量

所示的位置。随后再将它绕 y 轴转动 90°，即又经过一个角位移 $\boldsymbol{\theta}_2=\frac{\pi}{2}\boldsymbol{j}$，成为图3.34(c)所示的位置。如果 $\boldsymbol{\theta}_1$和 $\boldsymbol{\theta}_2$真是向量，那么它们应该可以相加，即

$$\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_1+\boldsymbol{\theta}_2=\frac{\pi}{2}\boldsymbol{i}+\frac{\pi}{2}\boldsymbol{j}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\boldsymbol{n},$$

其中$\boldsymbol{n}$表示 $\boldsymbol{i}$ 和$\boldsymbol{j}$的合成方向的单位向量，它沿着 x 和 y 轴的分角线。但是，如果以此线为转轴将图(a)的位置转过角度$\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$，则并不能得到图(c)的位置。同样，可以验证有限角位移不满足加法的交换律。读者可以将图(a)的位置先绕 Oy 轴转过 90°，然后再绕Ox 轴转过90°，看看得到什么结果。由此可以得出结论，**有限角位移不是向量。**

尽管有限角位移不是向量，但是无限小角位移却可以用平行四边形法则相加，即如果上面所说的转动角度是无限小量 $d\boldsymbol{\theta}_1$ 和 $d\boldsymbol{\theta}_2$，那么两次转动的结果，确实可以用平行四边形法则求和①。于是，把无限小角位移除以所经历的时间定义为角速度，那么它也是可以用平行四边形法则求和的。

① 证明可见有关参考书，如洛强斯基等著《理论力学教程》，汉译本，上册二分册§73.

下面用分析方法证明**角速度合成定理**，即关于角速度相加的定理。

首先要明确两个角速度向量相加的物理涵义。设有一个刚体相对于参考系S作定点运动，定点是O，其角速度向量记作$\boldsymbol{\omega}$。又设参考系S本身（作为一个刚体看待）相对于参考系S'作定点运动，定点也是O，其角速度向量记作$\boldsymbol{\Omega}$。刚体相对于参考系S'来说，当然也是作以O为定点的运动，将相应的角速度向量记作$\boldsymbol{\omega}'$。我们在刚体上取固连向量基$\mathbf{e}$，再分别在参考系S上取固连基$\mathbf{i}$及参考系S'上取固连基$\mathbf{i}'$。作了这些说明以后，我们可以有下面的角速度合成定理。

定理 设基$\mathbf{e}$相对于基$\mathbf{i}$的角速度为$\boldsymbol{\omega}$，基$\mathbf{i}$相对于基$\mathbf{i}'$的角速度为$\boldsymbol{\Omega}$，基$\mathbf{e}$相对于基$\mathbf{i}'$的角速度为$\boldsymbol{\omega}'$，则有

$$\boldsymbol{\omega}'=\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\Omega} \qquad (3.24)$$

证明 不失一般性，设基$\mathbf{e},\mathbf{i},\mathbf{i}'$的原点都在定点$O$。并设由基$\mathbf{i}$到基$\mathbf{e}$的变换矩阵是$\mathbf{P}$，而由基$\mathbf{i}'$到基$\mathbf{i}$的变换矩阵是$\mathbf{Q}$，即

$$\mathbf{e}=\mathbf{i}\mathbf{P}, \qquad (3.25)$$

和

$$\mathbf{i}=\mathbf{i}'\mathbf{Q}. \qquad (3.26)$$

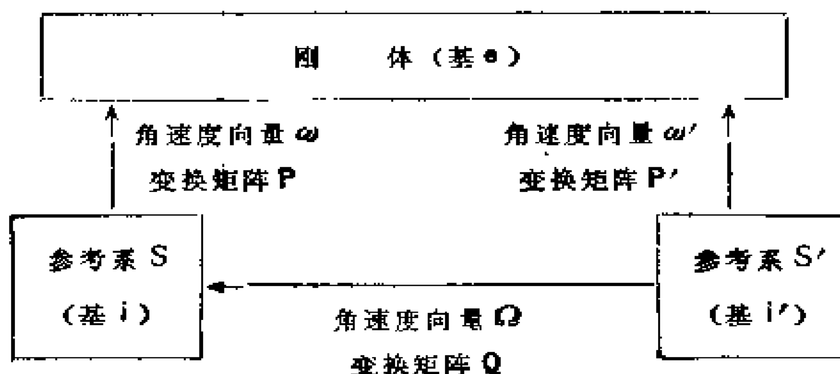
则显然

$$\mathbf{e}=\mathbf{i}'\mathbf{Q}\mathbf{P}, \qquad (3.27)$$

其中$\mathbf{P}$和$\mathbf{Q}$都是正交矩阵。所以，如由基$\mathbf{i}'$到基$\mathbf{e}$的变换矩阵是$\mathbf{P}'$，那么

$$\mathbf{P}'=\mathbf{Q}\mathbf{P}.$$

我们证明的实质就是由这个变换矩阵之间的关系推演出相应



角速度向量之间的关系式(3.24)。这些关系可用框图表示如上。

根据上节的结果，由式(3.25)变换矩阵 $\mathbf{P}$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 之间的关系为

$$\mathbf{P}^T\dot{\mathbf{P}}=\begin{bmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{bmatrix},$$

即有
$$\boldsymbol{\omega}=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3][\omega_1,\omega_2,\omega_3]^T.$$

同理，由式(3.26)变换矩阵 $\mathbf{Q}$ 与 $\boldsymbol{\Omega}$ 之间的关系为

$$\mathbf{Q}^T\dot{\mathbf{Q}}=\begin{bmatrix}0 & -\Omega_3 & \Omega_2\\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1\\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0\end{bmatrix},$$

即有
$$\boldsymbol{\Omega}=[\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3][\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3]^T.$$

考虑刚体上任意点 M，其向径 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{r}=\mathbf{e}\boldsymbol{\xi}^e,$$

其中 $\boldsymbol{\xi}^e$ 是向径 $\boldsymbol{r}$ 在基 $\mathbf{e}$ 中的坐标列阵，其中每个元素都是常量。将式(3.27)代入得

$$\boldsymbol{r}=\mathbf{i}'\mathbf{Q}\mathbf{P}\boldsymbol{\xi}^e.$$

我们来求 M 点在参考系 S' 中的速度 $\boldsymbol{v}'$。将上式对时间求导①，注意到在参考系 S' 中看 $\mathbf{i}'$ 是常向量基，坐标列阵 $\mathbf{Q}\mathbf{P}\boldsymbol{\xi}^e$ 是随时间变化的，而 $\boldsymbol{\xi}^e$ 又是常量列阵。所以

$$\boldsymbol{v}'=\mathbf{i}'\mathbf{Q}\dot{\mathbf{P}}\boldsymbol{\xi}^e+\mathbf{i}'\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{P}\boldsymbol{\xi}^e. \tag{3.28}$$

上式右端第一项可以利用式(3.25)和(3.26)以及(3.19)和(3.22)写成为

$$\mathbf{i}'\mathbf{Q}\dot{\mathbf{P}}\boldsymbol{\xi}^e=\mathbf{i}\dot{\mathbf{P}}\boldsymbol{\xi}^e=\mathbf{e}\mathbf{P}^T\dot{\mathbf{P}}\boldsymbol{\xi}^e=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r};$$

上式右端第二项可以写成为

$$\mathbf{i}'\dot{\mathbf{Q}}\dot{\mathbf{P}}\boldsymbol{\xi}^e=\mathbf{i}\mathbf{Q}^T\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{P}\boldsymbol{\xi}^e=\mathbf{i}\mathbf{Q}^T\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{x}^i=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r},$$

① 求导数必须说明参考系，因为在不同参考系中得到的导数不一样，见§3.6。

其中用到了坐标变换关系式（见式(2.21)）

$$\mathbf{P}\,\xi^i = \mathbf{x}^i,$$

$\mathbf{x}^i$ 是向径 $\boldsymbol{r}$ 在基 $\mathbf{i}$ 中的坐标列阵。于是式(3.28)可以写成

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\Omega})\times\boldsymbol{r}. \qquad (3.29)$$

另一方面，$\boldsymbol{v}'$ 是以 S' 为参考系的速度，根据式(3.22)M 点的速度可写成

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{\omega}'\times\boldsymbol{r}.$$

将上式和式(3.29)对比，因为其中 $\boldsymbol{r}$ 是任意的，所以关系式(3.24)成立。

从定理的证明过程我们可以看到，在分析上角速度是可以作为向量相加的，并且是可交换的。在几何上这对应于角速度满足向量的平行四边形加法法则。

以上讲了一个物理量是向量所必须具有的两个条件，而角速度是满足这两个条件的。回忆在1-1中我们说过："有大小、有方向，且满足以平行四边形法则作加法的物理量是向量"。至今为止我们一直是这样来理解向量的。这在一般的应用中已经够用了，而在许多教科书中也都是这样说的。现在我们要指出，这样来理解向量是不够全面的。严格地说，某一类物理量被称为向量应该再具有第三个条件，这就是，如果通过这个向量去表达一个客观的物理规律，则所写出的物理公式，在同一参考系中对于不同坐标系来说，应该具有相同的向量形式。或者说物理公式不依赖于坐标系的选取，即物理规律对于坐标变换具有不变性①。例如，对于点的位置向量 $\boldsymbol{r}$ 和速度向量 $\boldsymbol{v}$，物理公式 $\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}$，在同一参考系中不管对于哪个坐标系其形式都不会改变，这说明点的位置向量 $\boldsymbol{r}$ 和速度向量 $\boldsymbol{v}$ 是满足这个条件的。然而角速度却不满足这个条件。下面我们就来说明这一点。

刚体上点的速度分布公式是 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$，它是一个反映空间位

① 参见 Spencer 和 Moon 所著的《Vectors》一书，1966年英文版。这本书中有较好的历史材料，评述了向量的各种定义。

置、角速度和速度三个物理量之间的物理公式。现在我们来看这个公式对于任意选择的坐标系是否具有相同的向量形式?

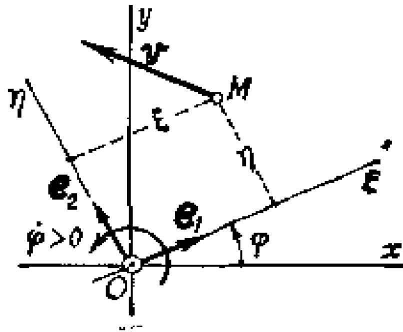


图3.35

设刚体上的固连坐标系 $O\xi\eta\zeta$ 绕 Oz 轴转过一个 φ 角(图3.35),则 $O\xi$ 与固定轴 Ox 的夹角为 φ,刚体的角速度 $\boldsymbol{\omega}=\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3$。根据式(3.8),坐标为 $(\xi,\eta,0)$ 的点 M 的速度为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}=(\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3)\times(\xi\boldsymbol{e}_1+\eta\boldsymbol{e}_2+0\boldsymbol{e}_3)=\xi\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_2-\eta\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_1.$$

如果我们取一组新的向量基 $[\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,\boldsymbol{e}'_3]$,它与 $[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ 的差别在于 $\boldsymbol{e}'_3=-\boldsymbol{e}_3$,即由图3.35中垂直纸面指向外的 $\boldsymbol{e}_3$ 变为垂直纸面指向里的 $\boldsymbol{e}'_3$,其他不变。这相当于一个镜面反射,将右手坐标系 $[O,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ 变为左手坐标系 $[O,\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,\boldsymbol{e}'_3]$。当然,这也是一种坐标变换,它的变换矩阵是

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}. \qquad (3.30)$$

在这种坐标变换下,M 点在基 $\mathbf{e}'$ 中的向径为(见公式(2.21))

$$\boldsymbol{r}'=\mathbf{e}'\mathbf{P}^T\mathbf{r}^e=\xi\boldsymbol{e}'_1+\eta\boldsymbol{e}'_2,$$

其中 $\mathbf{r}^e=[\xi,\eta,0]^T$。而在基 $\mathbf{e}'$ 中角速度为

$$\boldsymbol{\omega}'=\mathbf{e}'\mathbf{P}^T\boldsymbol{\omega}^e=-\dot{\varphi}\boldsymbol{e}'_3,$$

其中 $\boldsymbol{\omega}^e=[0,0,\dot{\varphi}]^T$。所以在基 $\mathbf{e}'$ 中 M 点的速度为

$$\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{\omega}'\times\boldsymbol{r}'=(-\dot{\varphi}\boldsymbol{e}'_3)\times(\xi\boldsymbol{e}'_1+\eta\boldsymbol{e}'_2)$$
$$=-(\xi\dot{\varphi}\boldsymbol{e}'_2-\eta\dot{\varphi}\boldsymbol{e}'_1).$$

但是由基 $\mathbf{e}$ 中的速度向量 $\boldsymbol{v}$ 直接变换到基 $\mathbf{e}'$ 中时,因

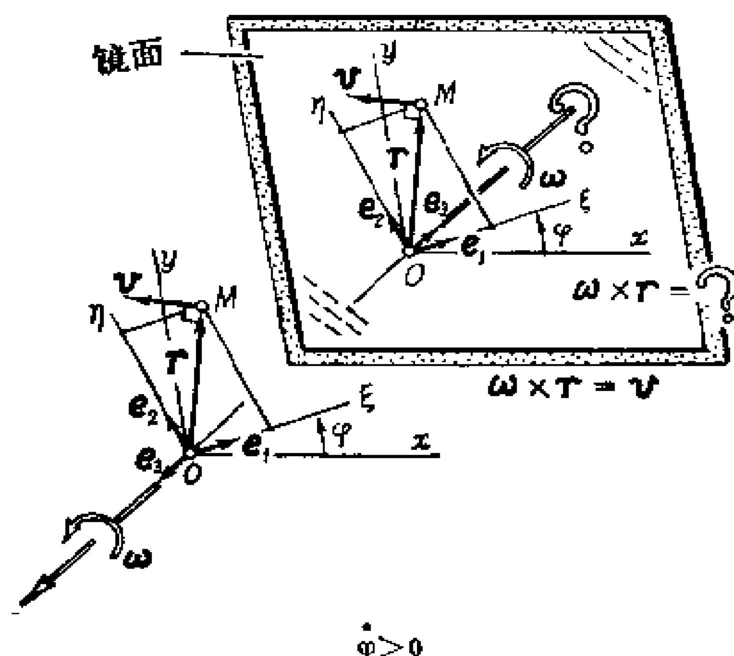
$$\mathbf{v}^e=[-\eta\dot{\varphi},\ \xi\dot{\varphi},\ 0]^T,$$

故有

$$\boldsymbol{v}'=\mathbf{e}'\mathbf{P}^T\mathbf{v}^e=\xi\dot{\varphi}\boldsymbol{e}'_2-\eta\dot{\varphi}\boldsymbol{e}'_1.$$

这显然和上式相矛盾。在上面的推演过程中，使用坐标变换是不会出问题的，问题只能出于在基 e' 中 M 点的速度不能表达为 $v'=\omega'\times r'$。如果将表达式改成 $v'=r'\times\omega'$，则矛盾就解决了。但这样一来，公式 $v=\omega\times r$ 在不同的坐标系中就不再具有不变性。这说明了角速度 ω 不能承受由右手系到左手系（或由左手系到右手系）这种坐标变换，即它不满足第三个条件。

我们还可以从几何直观来考虑这个问题。图3.36中镜面反射后撇号都略去未标出。读者试考虑镜子里角速度向量 ω（即上文



$\dot{\varphi}>0$

图3.36　镜面反射后 ω 的箭头指向是什么？

中的 ω'）的箭头应该怎样指才对？$\omega\times r=v$ 这个式子在镜子里是否还成立？这里产生的矛盾说明当右手系变换成左手系时，角速度不再满足物理公式具有不变性的条件。这种只满足第一个和第二个条件而不满足第三个条件的“向量”称作**伪向量**或**赝向量**（赝音 yàn，假的）或**轴向量**。这类向量还有力矩向量、动量矩向量等。三个条件都满足的向量叫做**极向量**，如速度向量、加速度向量等。因此，当我们说到角速度向量时，就必须对坐标变换

作些限制。比如，只考虑由右手系到右手系的变换①。以后，我们在讲角速度向量时，一律规定只准用右手系，这样即使"真伪不分"也露不出破绽来。

角速度这个物理量本质上是一个二阶反对称张量②，式(3.20)那个角速度矩阵 $\mathbf{P}^T\dot{\mathbf{P}}$ 的元素是角速度张量在向量基$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$中的坐标。如果我们只承认公式(3.21)，把它写成

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix},$$

而不引进角速度向量，那么就不必对右手系或左手系有什么限制。因为如果将右手系变换成左手系，向量基成为 $\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}'_3 = -\boldsymbol{e}_3$。相应的变换矩阵就是式(3.30)中的 $\mathbf{P}$。在这样的坐标变换下，速度与向径的新旧坐标的关系为

$$[v'_1, v'_2, v'_3]^T = [v_1, v_2, -v_3]^T,$$
$$[\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3]^T = [\xi_1, \xi_2, -\xi_3]^T.$$

而角速度张量的新旧坐标的关系为③

$$\begin{bmatrix} 0 & -\omega'_3 & \omega'_2 \\ \omega'_3 & 0 & -\omega'_1 \\ -\omega'_2 & \omega'_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

---

① 当变换矩阵是正交矩阵（见1-2）时，它的行列式的值可以是 +1，也可以是 −1. 这里要求将变换矩阵限于其行列式的值等于 +1 的情况. 镜面反射变换矩阵的行列式的值是 −1.

② 在第九章中将要引进张量的概念.

③ 张量的坐标变换详见第九章中的推导.

于是在新坐标系中速度分布公式变成

$$\begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ -v'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega'_3 & -\omega'_2 \\ \omega'_3 & 0 & \omega'_1 \\ \omega'_2 & -\omega'_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ -\xi'_3 \end{bmatrix}$$

又可以改写成

$$\begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega'_3 & \omega'_2 \\ \omega'_3 & 0 & -\omega'_1 \\ -\omega'_2 & \omega'_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \xi'_3 \end{bmatrix}.$$

由此看出，不管是右手系还是左手系公式具有相同的形式。

根据角速度合成定理，在计算角速度时可以通过引进中间参考系的方法而加以简化。

取坐标系 $O\xi\eta\zeta$ 固连在刚体上，它相对于固定系 $Oxyz$ 的位置可以用3-3中的方向余弦来表示。但这九个方向余弦并不是独立的，它们之间有六个关系式。实际上定点运动的刚体只有三个自由度，所以只需要三个独立的变量就可以描述其空间位置。比较常用的方法是引进三个**欧拉**角（图3.37(a)）。

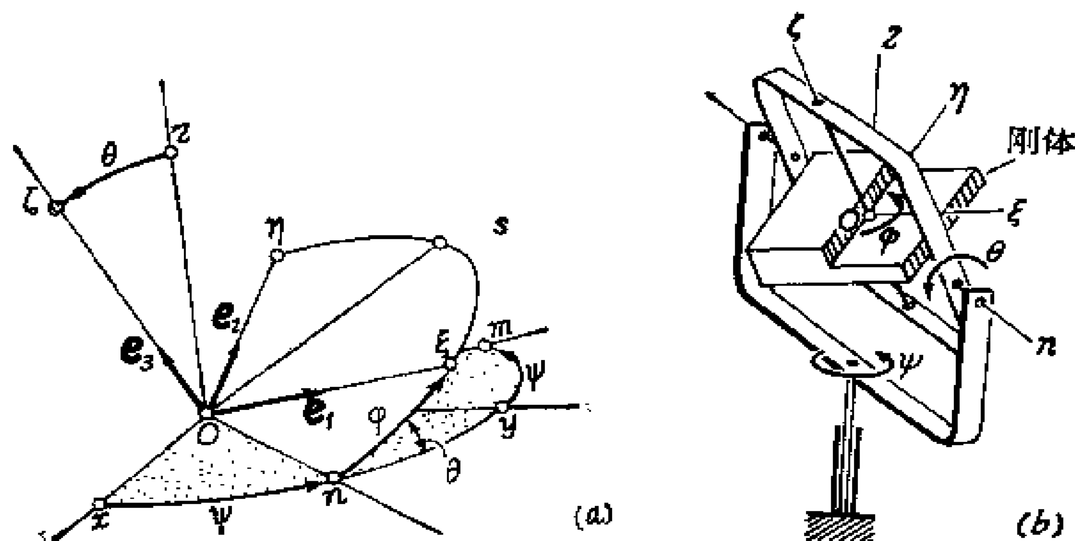


图3.37 欧 拉 角

设 $O\xi\eta$ 与 Oxy 两平面的交线为 On，称之为节线。于是刚体

$O\xi\eta\zeta$ 的位置完全由以下三个欧拉角确定：

角 xOn，记作 ψ，称为**进动角**；

角 $zO\zeta$，亦即 Oxy 平面与 $O\xi\eta$ 平面之间的夹角，记作 θ，称为**章动角**；

角 $nO\xi$，记作φ，称为**自转角**。

这些角度的正向规定如图。这样，刚体的运动方程就可以由三个欧拉角与时间的关系给出

$$\psi=\psi(t),\theta=\theta(t),\varphi=\varphi(t)。$$

其实，坐标架 $Oxyz$ 可以通过三次定轴转动转到 $O\xi\eta\zeta$ 的位置，其转动次序如下：

先作进动，将 $Oxyz$ 绕 z 轴转过 ψ 角，变成 $Onmz$；

再作章动，将 $Onmz$ 绕节线 On 转过 θ 角，变成 $Ons\zeta$；

最后作自转，将 $Ons\zeta$ 绕 ζ 轴转过 φ 角，变成 $O\xi\eta\zeta$。

如果把刚体安装在所谓“万向支架”(图3.37(b))上，那么进动就是外环(图中半个方框)的转动，章动就是内环(图中整个方框)相对于外环的转动，而自转就是刚体相对于内环的转动。进动、章动和自转都可用一个变换矩阵来代表，矩阵的元素由下列方向余弦表组成：

$\mathbf{P}_{进动}$	n	m	z
x	$\cos\psi$	$-\sin\psi$	0
y	$\sin\psi$	$\cos\psi$	0
z	0	0	1

$\mathbf{P}_{章动}$	n	s	ζ
n	1	0	0
m	0	$\cos\theta$	$-\sin\theta$
z	0	$\sin\theta$	$\cos\theta$

$\mathbf{P}_{自转}$	ξ	η	ζ
n	$\cos\varphi$	$-\sin\varphi$	0
s	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0
ζ	0	0	1

于是 $O\xi\eta\zeta$ 与 $Oxyz$ 之间的变换矩阵为

$$\mathbf{P}=\mathbf{P}_{进动}\mathbf{P}_{章动}\mathbf{P}_{自转}。$$

乘出后得相应于 P 的方向余弦表为：

P	ξ	η	ζ
x	$\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi$	$-\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\cos\theta\sin\psi$	$\sin\theta\sin\psi$
y	$\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\theta\cos\psi$	$-\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi$	$-\sin\theta\cos\psi$
z	$\sin\varphi\sin\theta$	$\cos\varphi\sin\theta$	$\cos\theta$

刚体的角速度矩阵是 $P^T\dot{P}$。显然，如果直接利用上述 P 的表达式来求角速度向量，计算是很繁的。现在，我们应用角速度合成定理来求角速度向量。

设 $\boldsymbol{z}^0$, $\boldsymbol{n}^0$ 和 $\boldsymbol{\zeta}^0$ 分别代表 z 轴、节线 n 和 ζ 轴的单位向量，则进动角速度为 $\boldsymbol{\omega}_{进动}=\dot{\psi}\,\boldsymbol{z}^0$，章动角速度为 $\boldsymbol{\omega}_{章动}=\dot{\theta}\,\boldsymbol{n}^0$，自转角速度为 $\boldsymbol{\omega}_{自转}=\dot{\varphi}\,\boldsymbol{\zeta}^0$。于是刚体的角速度为

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\psi}\,\boldsymbol{z}^0+\dot{\theta}\,\boldsymbol{n}^0+\dot{\varphi}\,\boldsymbol{\zeta}^0.$$

利用方向余弦表可知：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{z}^0&=\boldsymbol{s}^0\sin\theta+\boldsymbol{\zeta}^0\cos\theta\\&=(\boldsymbol{\xi}^0\sin\varphi+\boldsymbol{\eta}^0\cos\varphi)\sin\theta+\boldsymbol{\zeta}^0\cos\theta,\\\boldsymbol{n}^0&=\boldsymbol{\xi}^0\cos\varphi-\boldsymbol{\eta}^0\sin\varphi.\end{aligned}$$

代入上式即得角速度向量为①

$$\boldsymbol{\omega}=[\boldsymbol{\xi}^0,\boldsymbol{\eta}^0,\boldsymbol{\zeta}^0]\begin{bmatrix}\dot{\psi}\sin\varphi\sin\theta+\dot{\theta}\cos\varphi\\\dot{\psi}\cos\varphi\sin\theta-\dot{\theta}\sin\varphi\\\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta\end{bmatrix}.$$

*** 利用图3.38证明 $\boldsymbol{\omega}$ 在 $Oxyz$ 中的表示式为：

---

① 读者如不嫌麻烦而且足够细心的话，不妨直接从 P 的表达式出发算出，$P^T\dot{P}$，然后再写出其相伴向量，即得角速度向量 $\boldsymbol{\omega}$ 在基 $[\boldsymbol{\xi}^0,\boldsymbol{\eta}^0,\boldsymbol{\zeta}^0]$ 中的表达式。

$$\boldsymbol{\omega}=[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]\begin{bmatrix}\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi\\-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi+\dot{\theta}\sin\psi\\\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta\end{bmatrix}. \quad ***$$

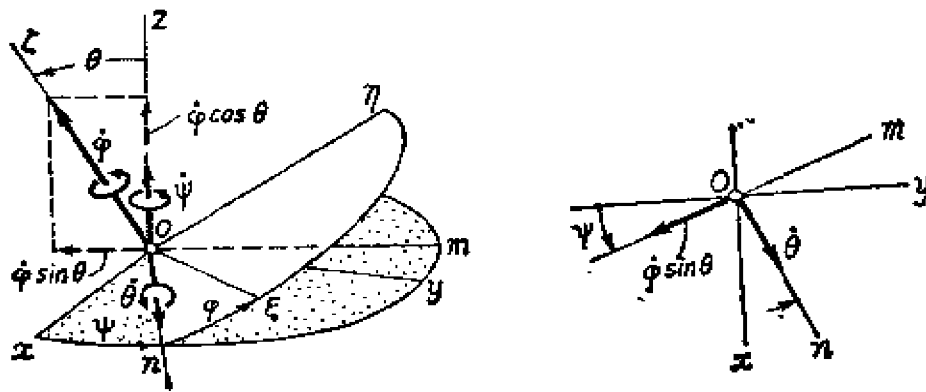


图3.38 求$\omega_x,\omega_y,\omega_z$

例3.9 求刚体作规则进动时的角加速度。刚体作定点运动时，保持章动角θ不变，进动角速度的大小$|\dot{\psi}|$不变，和自转角速度的大小$|\dot{\varphi}|$不变，这种运动称为**规则进动**。例如在一个陀螺（图3.39）受重力作用的规则进动中，θ＝常量，进动角速度记作$\boldsymbol{\omega}$（方向沿z轴），自转角速度记作$\boldsymbol{\Omega}$（方向沿ζ轴）。

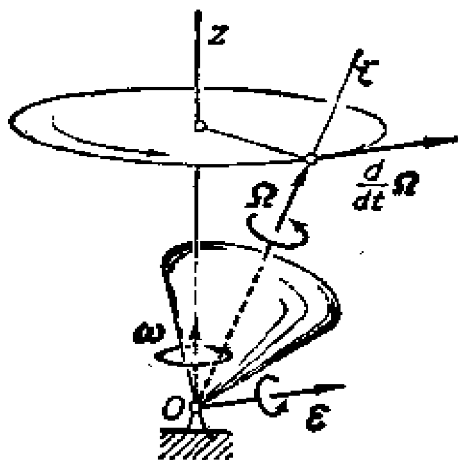


图3.39 规则进动

解 按照角速度合成定理，刚体的瞬时角速度为$\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\Omega}$。所以刚体的角加速度为

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\Omega}).$$

因为是规则进动，$\boldsymbol{\omega}$的大小和方向都不变，则有$\boldsymbol{\varepsilon}=d\boldsymbol{\Omega}/dt$。如果把向量$\boldsymbol{\Omega}$看成是一根作定点运动的刚性杆，则它的端点速度就是$d\boldsymbol{\Omega}/dt$。因为章动角$\theta$不变，

自转轴 ζ 将绕 z 轴作定轴转动，其角速度为 $\boldsymbol{\omega}$。根据式(3.22)，$\boldsymbol{\Omega}$ 向量的端点速度为 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\Omega}$，即

$$\boldsymbol{\varepsilon}=d\boldsymbol{\Omega}/dt=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\Omega}.$$

在大多数情况下，陀螺本身作高速自转，即满足条件 $\Omega\gg\omega$。在 6-4 及 9-5 中将对它们的动力学问题作专门的讨论。❙

3-5 刚体的一般运动

刚体最一般的运动需要有六个独立的变量来描述，即空间的自由刚体具有六个自由度。例如要确定一架飞机（图3.40(a)）的全部运动状态，可以在飞机上取一点 O，如它的重心，并通过 O 点作一坐标架 $O\xi\eta\zeta$ 固连于飞机上，如取飞机的对称平面为 $O\eta\zeta$，取机身的轴为 ζ 轴。于是，飞机的运动问题就被抽象成为这样一

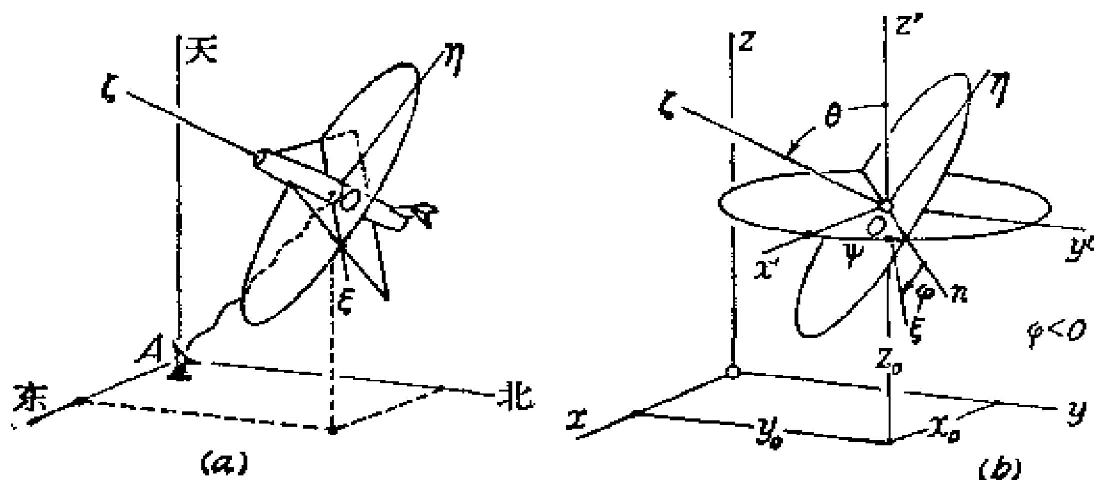


图3.40　飞机的运动

个数学模型：要确定任一时刻 O 点的位置（飞机重心的位置）和 $O\xi\eta\zeta$ 在空间的方向（飞机的姿态）。通过 O 点作一平动坐标架 $Ox'y'z'$（图3.40(b)），它与固定坐标系（例如东北天系）保持平行。于是 $O\xi\eta\zeta$ 的方向就可用三个欧拉角表示：$O\xi\eta$ 平面与 $Ox'y'$ 平面交于节线 On，进动角 $\psi=\angle x'On$，章动角 $\theta=\angle z'O\zeta$，自转角

$\varphi=\angle nO\xi$。刚体的全部运动方程为

$$\begin{cases} x_O=x_O(t), \quad y_O=y_O(t), \quad z_O=z_O(t); \\ \psi=\psi(t), \quad \theta=\theta(t), \quad \varphi=\varphi(t). \end{cases} \tag{3.31}$$

前三个式子可以写成向量形式

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_O(t).$$

但后三个式子没有相应的向量形式。

当在刚体上取定基点，装上固连系，再引进平动系以后，以下的分析方法就与平面运动的方法完全类似了。

在分析刚体上一点M的速度和加速度时，可以利用定点运动的结果，取固定系$[A,\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3]$和固连系$[O,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$，其中$O$点为基点。再取平动系$[O,\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3]$（图3.41），则刚体在平动参考系中作定点运动。

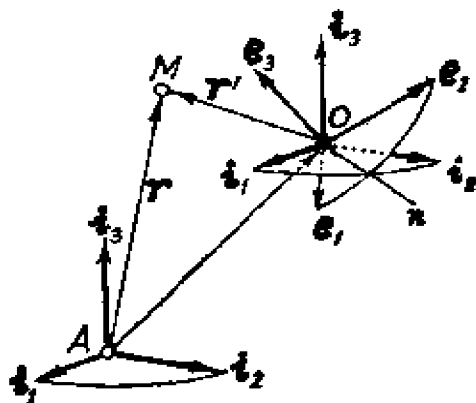


图3.41 分析刚体一般运动时用的三种坐标系

设刚体上任意点M的向径为

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{AM}.$$

由图3.41看出有关系式

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}_O+\boldsymbol{r}'$$
$$=\boldsymbol{r}_O+\mathbf{e}\boldsymbol{\xi}'.$$

其中$\boldsymbol{\xi}'=[\xi,\eta,\zeta]^T$是$\overrightarrow{OM}$在固连系中的坐标列阵。于是$M$点的速度为

$$\boldsymbol{v}=d\boldsymbol{r}/dt=\boldsymbol{v}_O+\dot{\mathbf{e}}\boldsymbol{\xi}'.$$

在3-3中我们已详细分析过关系式$\dot{\mathbf{e}}=\mathbf{i}\dot{\mathbf{Q}}=\mathbf{e}\mathbf{Q}^T\dot{\mathbf{Q}}$，利用角速度矩阵$\mathbf{Q}^T\dot{\mathbf{Q}}$的相伴向量$\boldsymbol{\omega}$便得$\dot{\mathbf{e}}\boldsymbol{\xi}'=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'$。由此得出速度分布公式为

$$\boxed{\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_O+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'.} \tag{3.32}$$

此式与平面运动中的式(3.10)形式上完全一样，不同的是目

前的 $\boldsymbol{\omega}$ 是大小和方向都在变化的瞬时角速度向量。如果运动方程是以式（3.31）给出的，则 $\boldsymbol{\omega}$ 应该用欧拉角表示：

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\psi}\boldsymbol{i}_3+\dot{\theta}\boldsymbol{n}^0+\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_3.$$

由式(3.32)对时间 t 再次求导便可得到加速度分布公式：

$$\boxed{\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_O+\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}').} \tag{3.33}$$

由此可见，只要知道每一时刻刚体上某一基点 O 的速度 $\boldsymbol{v}_O(t)$ 和刚体的角速度向量 $\boldsymbol{\omega}(t)$，就可以求出刚体上每一时刻各点的速度和加速度。角速度向量 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $O\xi\eta\zeta$ 的方向选择是无关的。因为如果另外选取一个固连系 $O\xi'\eta'\zeta'$，它的基为 $\mathbf{e}'$，那么应有变换关系

$$\mathbf{e}'=\mathbf{e}\mathbf{Q}'.$$

因为变换矩阵 $\mathbf{Q}'$ 的元素都是常量，故 $\mathbf{Q}'^T\dot{\mathbf{Q}}'=0$，它的相伴角速度向量为零向量。根据角速度合成定理可知，由于基 $\mathbf{e}$ 到基 $\mathbf{e}'$ 的更改，对刚体的角速度无影响。另外，角速度与基点的选择无关。因为角速度是由基 $\mathbf{e}$ 的方向余弦对时间 t 求导后经过运算后确定的，如果另外选一个基点 O'，取 $O'\xi\eta\zeta$ 为固连系，那么显然其方向余弦表不会有改变，因而角速度矩阵及其相伴向量都不会有变化。所以角速度向量是一个描述刚体整体运动的特征量。

总之，描述作一般运动的刚体的特征量一共有两个向量，即基点 O 的速度 $\boldsymbol{v}_O$ 和刚体的角速度 $\boldsymbol{\omega}$（图3.42）。在一般情况下，刚体基点速度 $\boldsymbol{v}_O$ 不一定与角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 平行。由于基点的选择是任意的，那么能不能在刚体（或者其延拓部分）上找到一点，它的速度刚好与 $\boldsymbol{\omega}$ 平行呢？答案是肯定的（$v_O=0$ 或 $\omega=0$ 的情况当然不必讨论）。事实上，可以在刚体上取一点 C，使得（当 $\omega\neq0$ 时）

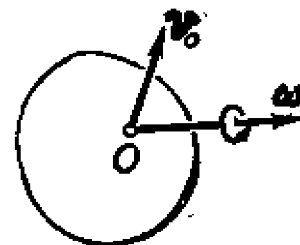


图3.42　描述刚体运动的两个特征量

$$\overrightarrow{OC}=\frac{\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_O}{\omega^2},$$

则利用速度分布公式可以证明，C点的速度$\boldsymbol{v}_C$平行于$\boldsymbol{\omega}$，且$\boldsymbol{v}_C$在$\boldsymbol{\omega}$上的投影为$\boldsymbol{v}_O \cdot \boldsymbol{\omega}/\omega$。不仅是$C$点，在过$C$点且平行于$\boldsymbol{\omega}$的直线$CC'$上所有的点都具有这样的性质(图3.43)，可见，每一瞬时刚体的运动总可以看成是沿CC'方向的平动，同时又绕CC'作转动，即瞬时的**螺旋运动**，CC'称为**瞬时螺旋轴**。螺旋运动可能是右手的，即$\boldsymbol{\omega}$与$\boldsymbol{v}_C$同向，也可能是左手的，即$\boldsymbol{\omega}$与$\boldsymbol{v}_C$反向。

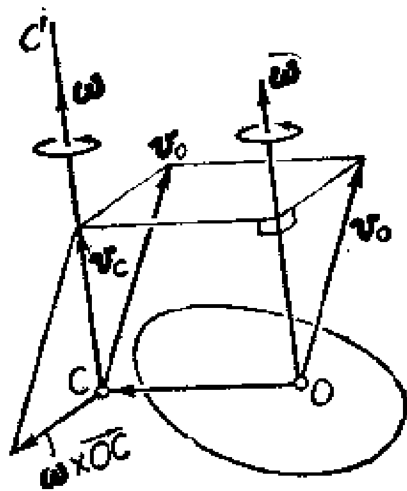


图3.43 瞬时螺旋轴

如果某瞬时$\omega=0$，则可认为刚体作瞬时平动，此时相当于螺旋轴在无穷远处。另外，平面运动中的瞬时转动轴是这里所说的螺旋轴的特殊情况。

在平面运动中，我们讨论过瞬心线，可以认为平面运动是动瞬心线（其实是一个固连在刚体上的柱面）沿定瞬心线（另一个固定在空间的柱面）作纯滚动所造成的。同样，在刚体一般运动中，瞬时螺旋轴在空间的轨迹是一直纹曲面，它在刚体上的轨迹是另一直纹曲面。刚体的运动可以这样看，在每一个瞬时，动直纹面在定直纹面上，以切线为轴作转动，同时又顺着切线作滑动。

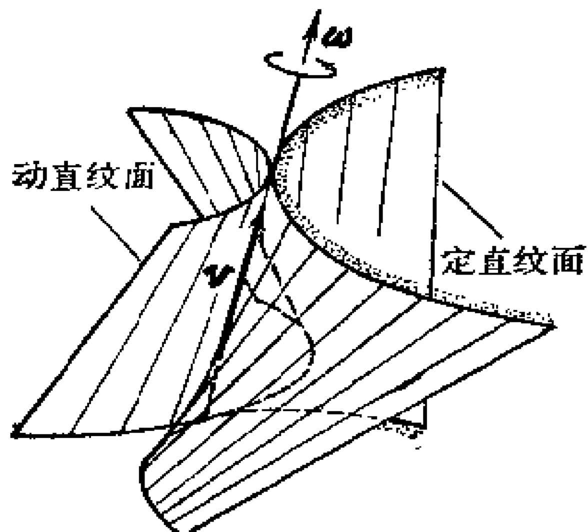


图3.44 刚体的一般运动

刚体的定点运动和平面运动是一般的螺旋运动的特殊情形，定点运动时，这两个直纹面都变成锥面(图3.45)，而在平面运动中，它们都变成了柱面(图3.46)。

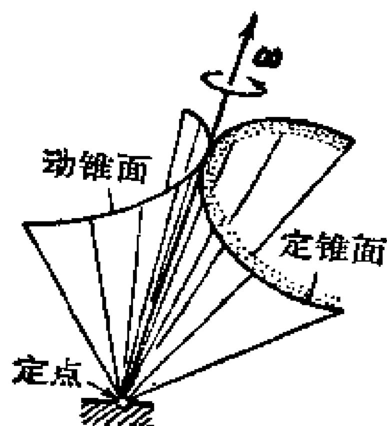


图3.45 刚体的定点运动

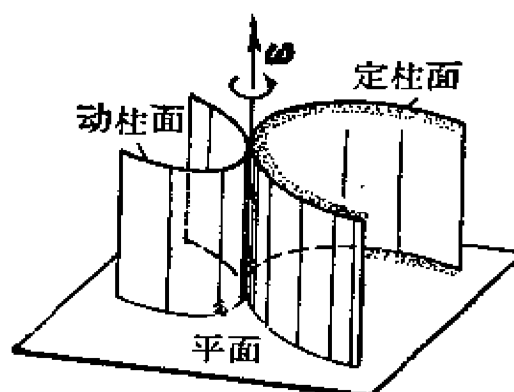


图3.46 刚体的平面运动

*** 把刚体的各种运动都作为一般运动的特例，统一应用公式(3.32)与(3.33)作一分析对比。***

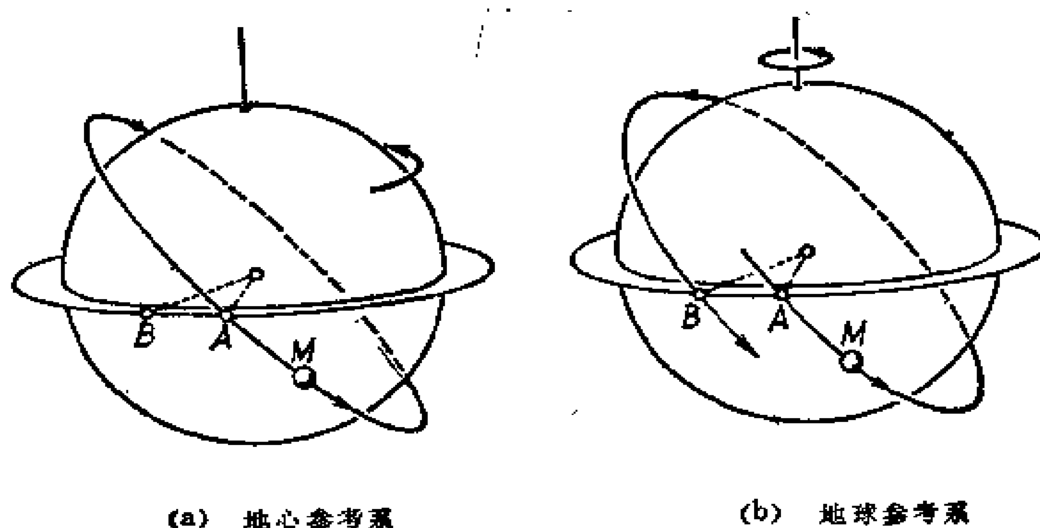
3-6 复合运动

一切运动都是相对的，选取的参考系不同，运动的情况也就不同。这一节将要研究物体（点、刚体）**对于不同参考系的运动之间的关系**，称为**复合运动问题**。

参考系的选择在动力学中有着根本的意义，因为只有在惯性参考系中牛顿定律才能适用。在非惯性系中的运动，只有转换到惯性参考系中才能用牛顿定律。这里就涉及从一个参考系到另一个参考系的运动转换问题。

即使单纯从运动学观点看，参考系选择得好，往往会使运动的分析大大简化，因而也需要考虑不同参考系之间运动的转换。例如，设人造卫星离地球中心的距离不变，它的运动轨迹在地心

参考系中是一个圆(图3.47(a))。实际上,对人造卫星的观测是在地球上的观测站中进行的,人们所看到的轨迹是相对于地球参考



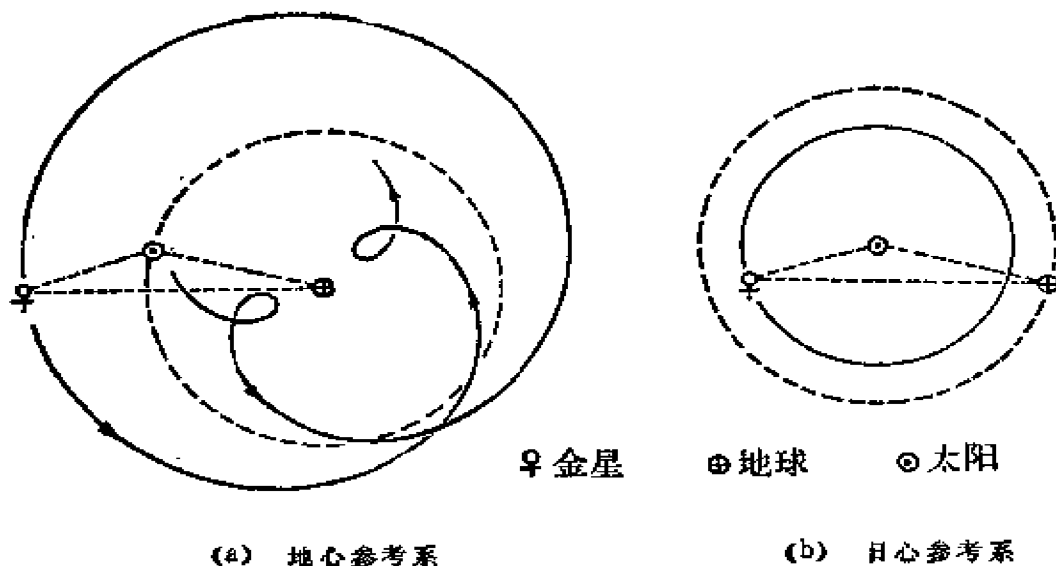
(a) 地心参考系　　(b) 地球参考系

图3.47　人造卫星的轨迹

系而言的,这条轨迹是不封闭的空间曲线(图3.47(b)),它与赤道平面相继两次的交点 A 与 B 的经度差约为 $360^\circ \times 1.5/24 = 22.5^\circ$ (人造卫星绕地球一圈的时间约为1.5小时,24小时是86164秒的大约数)。

在描述行星的运动时,如果用地心参考系,太阳的轨道近似地是一个圆,而行星则绕这个圆画出复杂的曲线(图3.48(a)),这就是按照托勒玫(Ptolemaeus,C.约90—168年)地心学说设想的一副图像。而哥白尼(Copernicus,N.1473—1543)的日心学说,用的是日心参考系(由太阳中心指向两个恒星的两相交轴线所组成的系统)。在日心参考系中,地球和其他行星的轨道都近似地是面(图3.48(b))。

在前几节中实际上已经遇到复合运动的问题:在平面运动和一般运动中都曾经引用了一个平动参考系;在角速度合成问题中考虑了一个定点转动的参考系。这一节将考虑一般的情形,即一个参考系(可当作刚体看)对另一个参考系作一般运动的情形。



(a) 地心参考系　　　　(b) 日心参考系

图3.48　行星的轨道

从原则上讲，这不过是一个坐标变换问题，在数学上是很容易处理的。如果知道物体对参考系甲的运动方程，又知道参考系甲相对参考系乙的运动方程，那么可以通过坐标变换计算出物体相对参考系乙的运动方程，从而计算出相应的速度和加速度。但是，在解决复合运动的问题时，通常不希望直接求运动方程，而是想求出每一瞬时各运动量（速度、加速度、角速度等）对不同参考系所取之值之间的关系。比如在3-2中解决平面运动问题时，就曾经这样做过。

为了方便起见，当我们所研究的问题牵涉到两个参考系时，就把其中一个叫做**定参考系**，另一个叫做**动参考系**。至于哪一个算是“定”的，哪一个算是“动”的，这多少是人为的，要看具体问题的需要而定。定和动是相对的，即使说反了，可能计算过程中繁简不一，但不会影响最后的结果。

现在先引进向量的相对导数的概念。

我们在求一个向量 $\boldsymbol{A}$ 对 t 的导数时，总要从比较两个相邻时刻的向量 $\boldsymbol{A}(t)$ 和 $\boldsymbol{A}(t+\Delta t)$ 开始，计算 $\boldsymbol{A}$ 在此时间间隔中的增

量

$$\Delta \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(t+\Delta t) - \boldsymbol{A}(t).$$

当谈到一个向量的增量时，必须明确是对哪一个参考系而言的，因为参考系不同，增量 $\Delta \boldsymbol{A}$ 也不同。

前几节中在求向量的导数时，我们没有强调导数是对哪一个参考系而言的，因为只涉及一个参考系。如果出现两个参考系，那么你不说明 $\Delta \boldsymbol{A}$ 是对哪一个参考系而言的，那就没有意义了。这和一个数量的增量不一样，数量的增量是不随参考系的选择而改变的。例如，设在时刻 t 和 $t+\Delta t$ 向量分别为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^*$（即 $\boldsymbol{A}(t+\Delta t)$）（图3.49(a)和(c)）。对于定参考系 Oxy 来说，$\boldsymbol{A}$ 的增量是 $\Delta \boldsymbol{A}$（图3.49(b)），但对动参考系 $O\xi\eta$ 来说，$\boldsymbol{A}$ 的增量并不

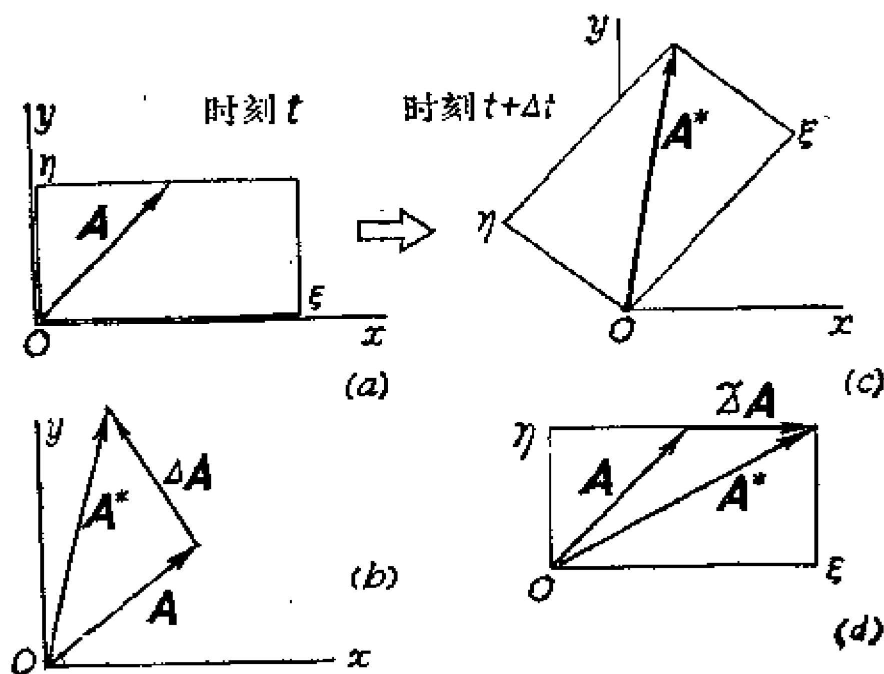


图3.49　向量的绝对增量和相对增量

是 $\Delta \boldsymbol{A}$，记作 $\tilde{\Delta} \boldsymbol{A}$ 以示区别（图3.49(d)）。

我们约定，一个向量 $\boldsymbol{A}$ 对于"定"参考系的增量 $\Delta \boldsymbol{A}$ 叫做绝

对增量，相应地它对时间 t 的导数

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{A}}{\Delta t}$$

叫做**绝对导数**，对于"动"参考系的增量 $\tilde{\Delta}\boldsymbol{A}$ 叫做**相对增量**，相应地它对时间 t 的导数

$$\frac{\tilde{d}\boldsymbol{A}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\tilde{\Delta}\boldsymbol{A}}{\Delta t}$$

叫做**相对导数**。以前将 $d\boldsymbol{A}/dt$ 简写成 $\dot{\boldsymbol{A}}$，在出现有相对导数的场合下，我们暂时停止使用这个符号，以免混淆。

下面推导绝对导数与相对导数之间的关系。

在定参考系上取坐标系 $[O,\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3]$，在动参考系上取固连（把动参考系看成一个刚体）坐标系 $[O',\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$，基 $\mathbf{i}$ 和基 $\mathbf{e}$ 都是正交单位基。两者的关系为

$$\mathbf{e}=\mathbf{i}\mathbf{Q}.$$

而为基 $\mathbf{e}$ 与动参考系一起随时间变化，所以基 $\mathbf{e}$ 的各方向余弦即矩阵 $\mathbf{Q}$ 的元素是时间 t 的函数。

向量 $\boldsymbol{A}$ 在不同参考系中可以分别表示为

$$\boldsymbol{A}=\mathbf{e}\mathbf{A}^e=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3][A_1^e,A_2^e,A_3^e]^T,$$
$$\boldsymbol{A}=\mathbf{i}\mathbf{A}^i=[\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3][A_1^i,A_2^i,A_3^i]^T.$$

按照相对导数的定义，在作 $\tilde{d}\boldsymbol{A}/dt$ 运算时，$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 应被认为是不变的，即 $\tilde{d}\mathbf{e}/dt=0$，故

$$\frac{\tilde{d}\boldsymbol{A}}{dt}=\mathbf{e}\frac{d\mathbf{A}^e}{dt}=\mathbf{e}\dot{\mathbf{A}}^e=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3][\dot{A}_1^e,\dot{A}_2^e,\dot{A}_3^e]^T.$$

在运算中我们已用到了数量导数与参考系无关这一性质，因此有 $\tilde{d}\mathbf{A}^e/dt=d\mathbf{A}^e/dt$。$\boldsymbol{A}$ 的绝对导数是

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\mathbf{e}\dot{\mathbf{A}}^e+\dot{\mathbf{e}}\mathbf{A}^e=\frac{\tilde{d}\boldsymbol{A}}{dt}+\dot{\mathbf{e}}\mathbf{A}^e.$$

以前已证明 $\dot{\mathbf{e}}=\mathbf{e}\mathbf{Q}^T\dot{\mathbf{Q}}$，其中 $\mathbf{Q}^T\dot{\mathbf{Q}}$ 是动参考系相对定参考系的角速度矩阵。引用 3-3 的结论，上式第二项 $\dot{\mathbf{e}}\mathbf{A}^e$ 可以写成 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}$。

其中 ω 是动参考系相对定参考系的角速度向量。于是上式就写成

$$\boxed{\frac{d}{dt}\boldsymbol{A}=\frac{\tilde{d}}{dt}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}.} \tag{3.34}$$

此式给出了绝对导数与相对导数之间的关系，即向量的绝对导数等于它的相对导数加上动参考系的角速度叉乘这个向量。

更合理的说法是：设有两个参考系，一个叫 1，一个叫 2，相对它们的导数分别用符号 $\frac{d_1}{dt}$ 和 $\frac{d_2}{dt}$ 表示，用 ω_{21} 表示参考系 2 相对参考系 1 的角速度，则对任意的向量（ ）有关系式

$$\frac{d_1}{dt}(\quad)=\frac{d_2}{dt}(\quad)+\boldsymbol{\omega}_{21}\times(\quad).$$

或者再简单一点，写出运算符号就可以，即

$$\frac{d_1}{dt}\quad=\frac{d_2}{dt}\quad+\boldsymbol{\omega}_{21}\times\quad.$$

在特殊情况下，如动参考系是平动参考系，则因 $\omega=0$，所以绝对导数与相对导数是相等的。

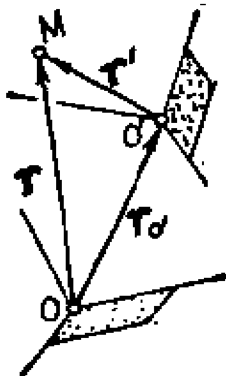


图 3.50

现在利用以上结果来讨论点的复合运动。点相对定参考系的运动叫做**绝对运动**，在其中的速度、加速度叫做**绝对速度**和**绝对加速度**。设向径是 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，则绝对速度为 $\boldsymbol{v}=d\boldsymbol{r}/dt$，绝对加速度为 $\boldsymbol{a}=d\boldsymbol{v}/dt$。

相应地，点在动参考系中的运动称为**相对运动**。设向径是 $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}'(t)$，则**相对速度**为 $\boldsymbol{v}_r=\tilde{d}\boldsymbol{r}'/dt$，**相对加速度**为 $\boldsymbol{a}_r=\tilde{d}\boldsymbol{v}_r/dt$，其中下标 r 代表相对的意思。由图3.50可知 M 点的向径为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{O'}+\boldsymbol{r}'$，对它求绝对导数得

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}_{O'}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}.$$

左边表示 M 点的绝对速度，右边第一项就是动参考系基点 O' 的绝对速度 $\boldsymbol{v}_{O'}$，第二项根据式(3.34)有

$$\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}=\frac{\tilde{d}\boldsymbol{r}'}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{v}_r+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'.$$

将它代入上式就得

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_r+\boldsymbol{v}_{O'}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'. \tag{3.35}$$

问题是 $\boldsymbol{v}_{O'}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'$ 的意义是什么？对照3-5中公式(3.32)就不难明白。如果把动参考系看成为一个刚体，那么这就是动参考刚体上某一点的速度。这个“某一点”究竟是哪一个点？是 M 点吗？当然不是，因为 M 点并不是动参考刚体上的点。如果回答说这是动参考刚体上向径为 $\boldsymbol{r}'$（对于动参考系来说）的那个点，这就正确了。但是这样说太抽象，不能给人们以具体的印象。根据 M 点在所考虑瞬时的向径也是 $\boldsymbol{r}'$（相对于动参考系）这一特点，可以这样说明：$\boldsymbol{v}_{O'}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'$ 是假想 M 点在所考虑的瞬时被“固连”或“冻结”在动参考刚体上，跟着动参考刚体一起运动时所具有的速度。M 点的这种运动称为**牵连运动**，意思是 M 点受动参考刚体的拖带或牵连而产生的运动。M 点的这种速度就叫做**牵连速度**，用 $\boldsymbol{v}_e$ 代表（e——entraînment 法文）。于是由式(3.35)得出下列复合运动中的**速度合成公式**：

$$\boxed{\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_r+\boldsymbol{v}_e,} \tag{3.36}$$

即点的绝对速度等于相对速度和牵连速度的向量和。

例3.10 一根直管 OP 在 Oxy 平面中绕 O 转动(图3.51)，其运动方程为 $\varphi=\varphi(t)$。一小球 M 在管内沿 OP 运动，其运动方程为 $\rho=\rho(t)$。求 M 的绝对速度。

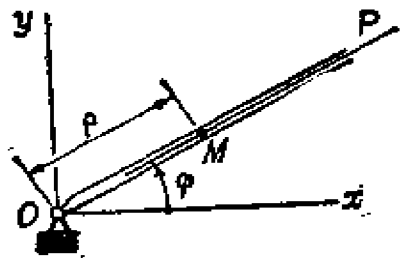


图 3.51

解 取管子为动参考系，则小球的相对运动是直线运动，相

对速度是

$$v_r = \dot{\rho}\rho^0.$$

所谓牵连运动就是假想把小球在某一瞬时冻结在管壁上，由管子拖带着它一起运动。目前牵连运动是半径为 ρ 的圆周运动，因此牵连速度为

$$v_e = \rho\dot{\varphi}\varphi^0.$$

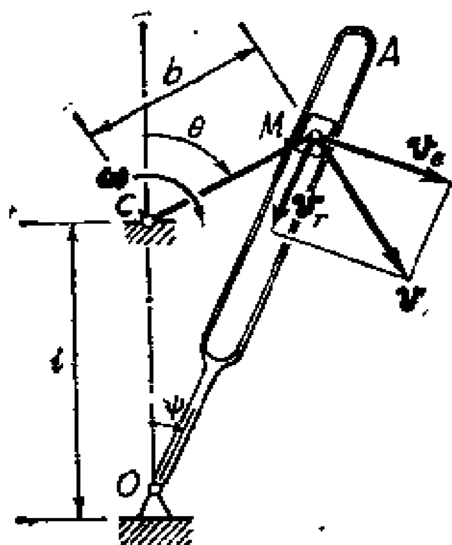


图3.52 摇杆机构

应该提醒注意的是，在不同瞬时考虑问题时，M 被冻结在管子上的位置是不同的，因此牵连运动的圆周半径 ρ 是随时间 t 在变化着的。

根据式(3.36)得出小球的绝对速度是

$$v = \dot{\rho}\rho^0 + \rho\dot{\varphi}\varphi^0.$$

显然，这和由极坐标导得的公式是一样的。这也可以作为推导极坐标中速度公式的一种方法。▌

例3.11 摇杆机构如图3.52所示。曲柄 CM 以等角速度 ω 绕 C 点转动，M 可在摇臂 OA 的滑槽内移动(图3.52)。已知 $OC=l$，$CM=b$，求 CM 处于水平位置时摇臂 OA 的角速度。

解 如果列出 OA 的转动方程

$$\psi = \psi(t) = \text{arc tg}\frac{b\sin\theta}{l+b\cos\theta},$$

其中 $\theta=\omega t$。再将 $\psi(t)$ 对 t 求一次导数，最后将 $\theta=\pi/2$ 代入即可以得出所求结果。

现在我们用复合运动的办法求解。取摇杆 OA 为动参考系，滑块 M 为我们研究的点。于是相对运动是直线运动，相对速度 v_r 沿 AO 方向。M 的绝对运动轨迹是以 C 为中心、b 为半径的圆，

所以绝对速度 $\boldsymbol{v}$ 垂直于 CM，大小为 $b\omega$。牵连速度是将 M 冻结在摇臂OA上跟随OA一起绕O点转动的速度，它的大小为$\overline{OM}$乘以角速度 $|\dot{\psi}|$，方向与 OA 垂直。根据式(3.36)并利用向量三角形（图3.52）的几何关系可求得

$$\overline{OM}\ |\dot{\psi}|=b\omega|\cos(\theta-\psi)|.$$

以$\theta=\pi/2$，$\overline{OM}=\sqrt{l^2+b^2}$ 及 $\psi=\operatorname{arc\,tg}(b/l)$ 代入，可以得出所求的角速度大小为

$$|\dot{\psi}|=\frac{b^2}{l^2+b^2}\omega.$$

由 $\boldsymbol{v}_e$ 的指向可知 OA的转动方向是顺时针方向。 ▎

将速度合成公式(3.36)对时间 t 求一次导数得

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{v}_r}{dt}+\frac{d\boldsymbol{v}_e}{dt} \tag{3.37}$$

我们不能轻易地由式(3.37)就断言绝对加速度等于相对加速度加牵连加速度。因为等式左边是绝对加速度，这是没有问题的。但是，$d\boldsymbol{v}_r/dt$ 是不是相对加速度？$d\boldsymbol{v}_e/dt$ 是不是牵连加速度？这需要仔细地进行分析。

利用式(3.34)可得

$$\frac{d\boldsymbol{v}_r}{dt}=\frac{\tilde{d}\boldsymbol{v}_r}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r. \tag{3.38}$$

等号右边第一项 $\tilde{d}\boldsymbol{v}_r/dt$ 即是相对加速度 $\boldsymbol{a}_r$，第二项当 $\boldsymbol{\omega}=0$时是没有的，所以它是由于动参考系的转动而产生的附加项。

再计算牵连速度的绝对导数。根据式(3.34)可得

$$\frac{d\boldsymbol{v}_e}{dt}=\frac{d\boldsymbol{v}_{O'}}{dt}+\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')=\boldsymbol{a}_{O'}+\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}$$

$$=\boldsymbol{a}_{O'}+\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r.$$

将最后一式前三项之和与上节中的式(3.33)相比较，就知道这是

动参考刚体上某一点的加速度，根据与牵连速度类似的解释，它就是**牵连加速度**，记作$\boldsymbol{a}_e$。上式中第四项也是由于动参考系的转动而产生的附加项。因此，式(3.38)最后可以写成

$$\boxed{\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_e+\boldsymbol{a}_c} \tag{3.39}$$

其中 $\boldsymbol{a}_c=2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$，称为**科氏加速度**①**或附加加速度**。如相对速度不为零；动参考系有转动且转动角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 与相对速度 $\boldsymbol{v}_r$ 不平行，则科氏加速度$\boldsymbol{a}_c$不为零。

加速度合成公式(3.39)表明：绝对加速度等于相对、牵连和科氏三项加速度的向量和。

例3.12 已知地球相对地心参考系的角速度为$\boldsymbol{\Omega}$，其大小为7.29×10^{-5} 1/秒，方向沿地轴(由南极指向北极)。设在纬度$\lambda=40°$处某一运载器M（船或飞机等）在地面沿子午线由南向北等速航行。已知速度$u=1000$米/秒，M到地心的距离R不变。分析运载器相对地心参考系的加速度，并求出科氏加速度的大小。

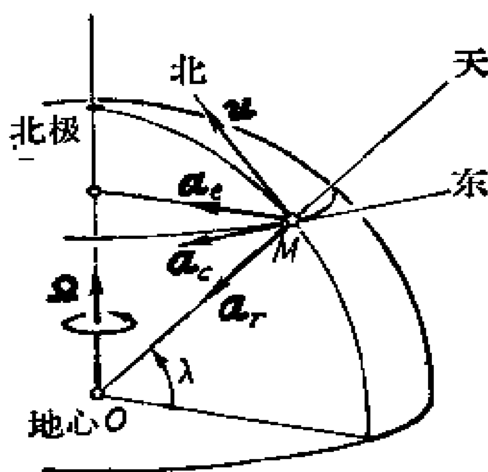


图3.53 运载器相对地心参考系的加速度

解 取当地的（与地球固连的）东北天坐标系，则这个动坐标系的角速度也是$\boldsymbol{\Omega}$(图3.53)。由于运载器M相对地球作等速圆周运动，故相对加速度$\boldsymbol{a}_r$的大小为u^2/R，方向指向地心。牵连加速度$\boldsymbol{a}_e$的大小为$R\Omega^2\cos\lambda$，方向垂直地轴且指向地轴。科氏加速度 $\boldsymbol{a}_c=2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_r$，这里$v_r=u$，所以$a_c=2\Omega u\sin\lambda\approx0.094$米/秒²，大约是重力加速度的百分之一，方向向西。由于科氏加速度所造

① Coriolis, G.G.（法国人，1792—1843)在1835年提出。

成的后果将在8-3中详细讨论。 ▌

*** 半径为R的圆环以等角速Ω绕O转动，小虫M在边缘上以相对匀速u爬行(图3.54)，恒等式 $R\left(\Omega-\frac{u}{R}\right)^2=R\Omega^2-2\Omega u+\frac{u^2}{R}$ 的左右端的每一项表明什么物理意义？***

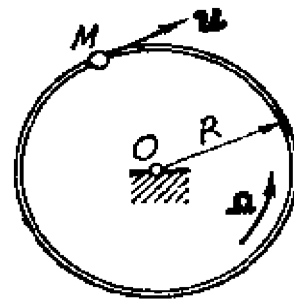


图3.54 小虫爬环

*** 利用例3.10的方法导出极坐标中的加速度公式。***

有了点的复合运动公式(3.36)和(3.39)，以及角速度合成公式(3.24)以后，刚体的复合运动问题就很容易解决了。设动参考系自身的运动（作为一个刚体看待）由其基点O的绝对速度$\boldsymbol{v}_O$及绝对角速度$\boldsymbol{\Omega}$来描述，而被我们研究的刚体又相对动参考系运动。为了计算刚体上任意点的相对运动量和绝对运动量之间的关系，我们取刚体上某一点A为基点，它的相对速度为$\boldsymbol{v}_{Ar}$，刚体的相对角速度为$\boldsymbol{\omega}_r$。于是立刻可以得出刚体上基点A的绝对速度和刚体的绝对角速度为

$$\boldsymbol{v}_A=\boldsymbol{v}_{Ar}+\boldsymbol{v}_O+\boldsymbol{\Omega}\times\overrightarrow{OA},$$
$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_r+\boldsymbol{\Omega}.$$

A点的绝对加速度为

$$\boldsymbol{a}_A=\boldsymbol{a}_{Ar}+\left[\boldsymbol{a}_O+\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\times\overrightarrow{OA}+\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\overrightarrow{OA})\right]+2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_{Ar}.$$

刚体的绝对角加速度可以将角速度合成公式对时间t求一次绝对导数得出：

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}_r+\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\omega}_r.$$

有了这四个关系式后，就不难根据刚体上点的速度与加速度分布公式具体地去计算刚体上任意点的相对运动量与绝对运动量之间

的关系。

在工程技术问题中，比较有用处的是角速度合成。例如，在一个机构中有许多个零件，我们把第 i 个零件相对第 j 个零件的角速度记作 ω_{ij}，则第 j 个零件相对第 i 个零件的角速度就是 ω_{ji}。一个零件相对它自身的角速度必为零，所以有

$$\omega_{ii}=\omega_{ij}+\omega_{ji}=0.$$

由此可知，

$$\omega_{ij}=-\omega_{ji}.$$

反复应用上述关系和角速度合成公式，我们就可以解决一个系统中包含许多零件的转动问题。

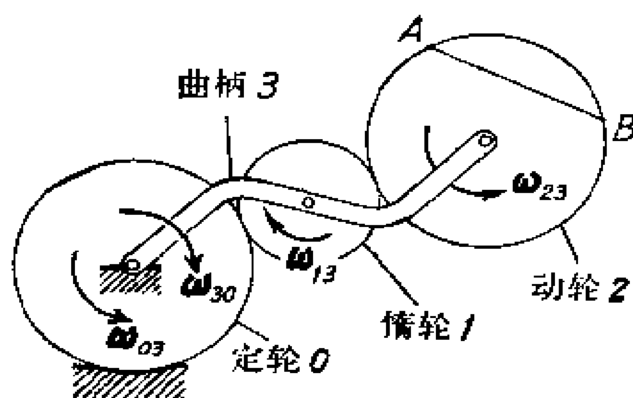


图3.55 转动偶

例3.13 一个机构有三个齿轮互相啮合，并用一曲柄相连，轮子中心在同一直线上（图3.55）。设定轮 0 与动轮 2 的半径相等，曲柄的绝对角速度 ω_{30} 为已知，求动轮 2 的绝对角速度 ω_{20}。

解 将曲柄标号为 3，取它为动参考系。在此参考系中，根据三个齿轮啮合无滑动的条件可得关系式

$$r_0\omega_{03}=r_1\omega_{13}=r_2\omega_{23}.$$

因为 $r_0=r_2$，所以 $\omega_{03}=\omega_{23}$。由图3.55中可以看出 ω_{03} 与 ω_{23} 的转动方向一致，所以 $\omega_{03}=\omega_{23}$。

根据角速度合成公式有 $\omega_{20}=\omega_{23}+\omega_{30}$，将 $\omega_{23}=\omega_{03}=-\omega_{30}$ 代入，得 $\omega_{20}=0$。由此可知，不论曲柄的绝对角速度为何值，动轮 2 总是在作平动，动轮上任一直线 AB 在平面上的方向不会改变。▌

例3.14 卡尔登-虎克万向接头如图 3.56 所示，它的十字接

头AOB绕固定点O作定点运动，两个叉子分别绕轴 1 和轴 2 作定轴转动，两轴之间夹角为α。设叉子 1 的角速度大小为ω_1，求叉

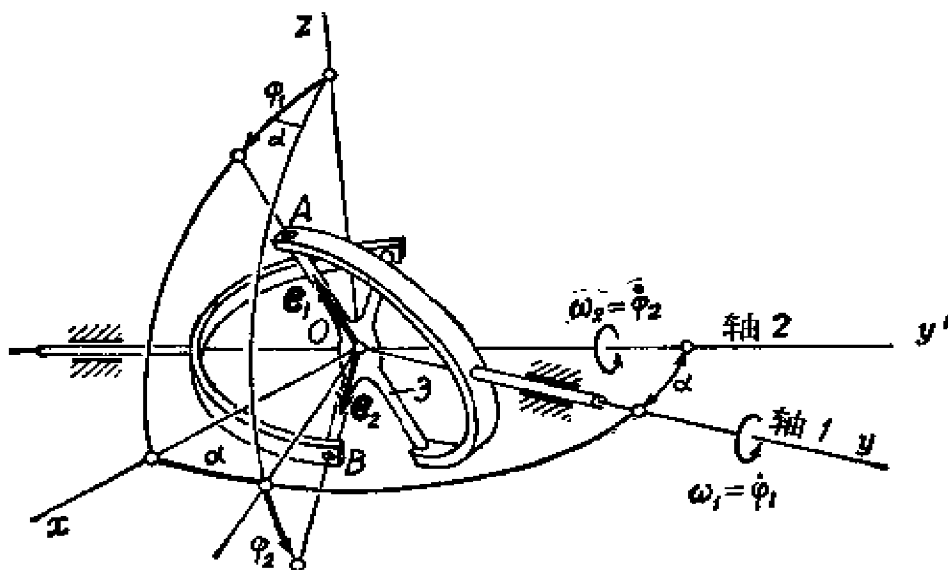


图3.56 卡尔登-虎克方向接头

子 2 的角速度大小以及十字接头的绝对角速度。

解 取轴 1 和轴 2 所组成的平面为Oxy平面，轴 1 为y轴。取固定坐标系$Oxyz$如图3.56所示。取单位向量$\boldsymbol{e}_1$沿OA方向，$\boldsymbol{e}_2$沿OB方向。$\boldsymbol{j}'$沿Oy'方向。十字架作定点运动，设它的绝对角速度向量为$\boldsymbol{\omega}$。

如以叉子 1 为中间参考系，设十字架相对于叉子 1 的角速度为$\omega_{1r}\boldsymbol{e}_1$，叉子 1 相对于固定系的角速度为$\omega_1\boldsymbol{j}$。由角速度合成定理，有

$$\boldsymbol{\omega}=\omega_1\boldsymbol{j}+\omega_{1r}\boldsymbol{e}_1. \tag{1}$$

如以叉子 2 为中间参考系，设十字架相对于叉子 2 的角速度为$\omega_{2r}\boldsymbol{e}_2$，叉子 2 相对固定系的角速度为$\omega_2\boldsymbol{j}'$。则有

$$\boldsymbol{\omega}=\omega_2\boldsymbol{j}'+\omega_{2r}\boldsymbol{e}_2.$$

由此可得

$$\omega_1\boldsymbol{j}+\omega_{1r}\boldsymbol{e}_1=\omega_2\boldsymbol{j}'+\omega_{2r}\boldsymbol{e}_2 \tag{2}$$

因为 $\boldsymbol{j}'=-\sin\alpha\boldsymbol{i}+\cos\alpha\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{e}_1$ 垂直于 $\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{i}=\sin\varphi_1$，所以将式(2)两边点乘 $\boldsymbol{e}_1$ 得

$$\omega_{1r}=-\omega_2\sin\alpha\sin\varphi_1. \tag{3}$$

又因为 $\boldsymbol{j}'$ 垂直 $\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{j}'\cdot\boldsymbol{e}_1=-\sin\alpha\sin\varphi_1$，$\boldsymbol{j}'\cdot\boldsymbol{j}=\cos\alpha$，所以将式(2)两边点乘 $\boldsymbol{j}'$ 得

$$\omega_1\cos\alpha-\omega_{1r}\sin\alpha\sin\varphi_1=\omega_2. \tag{4}$$

将式(3)代入式(4)，得叉子 2 的角速度大小为

$$\omega_2=\omega_1\cdot\frac{\cos\alpha}{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi_1}. \tag{5}$$

因为 $\boldsymbol{e}_1=\sin\varphi_1\boldsymbol{i}+\cos\varphi_1\boldsymbol{k}$，将式(5)和式(3)代入式(1)，得十字架的绝对角速度为

$$\boldsymbol{\omega}=\omega_1\boldsymbol{j}-\omega_1\frac{\cos\alpha\sin\alpha\sin\varphi_1}{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi_1}(\sin\varphi_1\boldsymbol{i}+\cos\varphi_1\boldsymbol{k}).\ \blacksquare$$

*** 验证：利用 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=0$ 可直接求出两轴转角 $\varphi_1(t)$ 与 $\varphi_2(t)$ 之间的关系

$$\varphi_2=\text{arc tg}\left(\frac{\cos\alpha}{\text{tg}\,\varphi_1}\right).$$

将上式对 t 求导，可得角速度之间的关系(5)。***

*** 利用角速度矩阵 $Q^T\dot{Q}$ 直接计算出例3.14中十字接头的绝对角速度向量。***

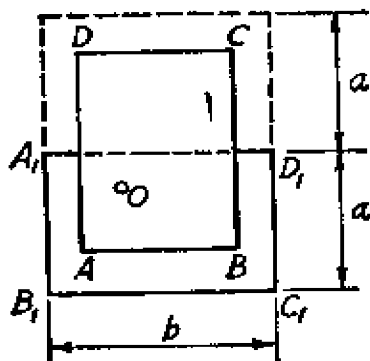
*** 利用角速度合成定理求例3.7中滚动轮子的角速度、角加速度和轮上最高点的加速度。***

习　题

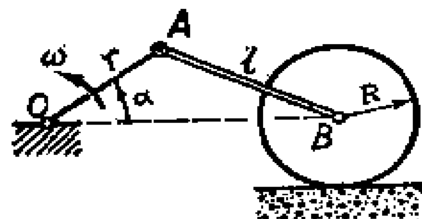
3.1　半径为 R 的具有水平轴的滑轮上绕一细绳，绳子的自由端挂一重物。设重物以匀加速度 a_0 自静止开始下降。试以重物下降的距离 h 表示轮缘上一点的加速度。

3.2　可折合的长方形桌面，其边长为 a 和 b。桌面绕小钉

之轴 O 转动，从 $ABCD$ 的位置转成 $A_1B_1C_1D_1$ 的位置（见图）。折合面展开后成为边长为 b 与 $2a$ 的长方形，且折合时和展开后桌面的几何中心位置相重合。求小钉轴 O 的位置。



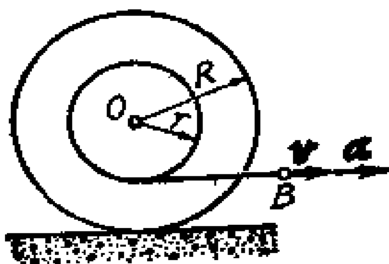
题 3.2 图



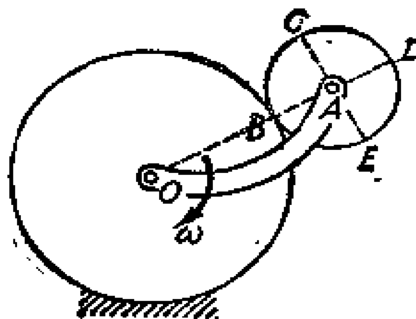
题 3.3 图

3.3 滚压机构的滚子沿水平面作纯滚动。曲柄 AO 长 r，连杆 AB 长 l，滚子半径为 R。若曲柄以常角速度 ω 绕固定轴 O 转动，$\angle AOB=\alpha$，求滚子的角速度和角加速度。

3.4 半径为 R 的绕线轮沿水平面作纯滚动，在轮上有圆柱部分，其半径为 r。在圆柱上绕有细线，线的 B 端以速度 v 和加速度 a 沿垂直于轮轴的水平方向运动，且线被拉直。求绕线轮轴心 O 的速度和加速度。



题 3.4 图

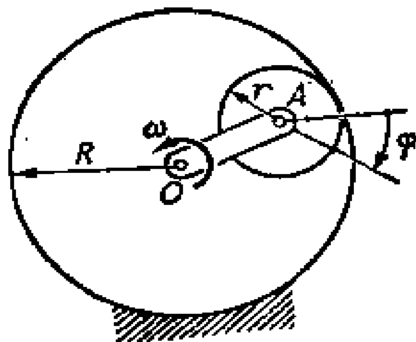


题 3.5 图

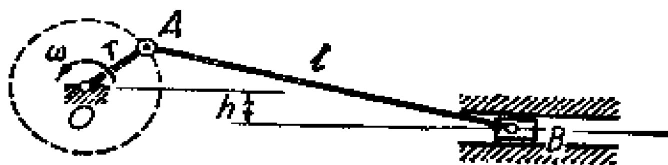
3.5 设固定齿轮 O 与动齿轮 A 的半径各为 R 和 r，曲柄

OA 绕 O 轴作等角速转动，其角速度为 ω。设直线 $OBAD$ 和 CAE 相垂直。求动齿轮上 A,B,C,D 和 E 各点的速度（大小和方向）。

3.6 半径为 r 的齿轮由曲柄 OA 带动，并在内半径为 R 的固定齿轮内滚动。曲柄 OA 以常角速度 ω_0 绕固定齿轮之轴 O 转动。当 $t=0$ 时，动齿轮的转角 $\varphi=0$，以动齿轮的中心 A 为基点，求动齿轮的运动方程。



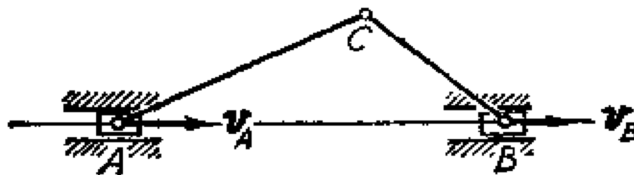
题 3.6 图



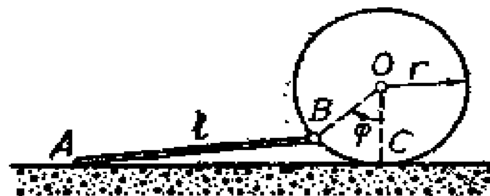
题 3.7 图

3.7 偏置的曲柄连杆机构的曲柄 OA 以 $\omega=1.5$ 1/秒的角速度绕 O 轴转动。若 $OA=r=40$ 厘米，连杆 $AB=l=200$ 厘米，偏心距 $h=20$ 厘米。求当曲柄 OA 在两个竖直位置和两个水平位置时滑块 B 的速度。

3.8 如图所示，两杆 AC 和 BC 在 C 处用铰链连接，滑块 A 和 B 在同一直线上运动。已知 $AC=b, BC=a$。设在某瞬时 A 与 B 的瞬时速度为 v_A 与 v_B，且距离 $AB=c$。用图解法求铰链 C 点的速度（大小和方向）。



题 3.8 图

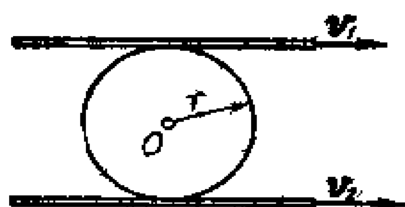


题 3.9 图

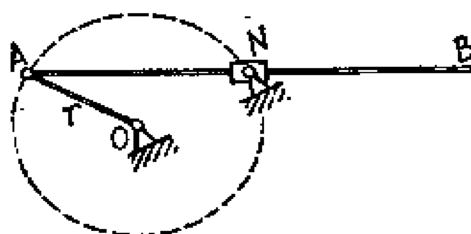
3.9 圆盘在水平面上沿直线作纯滚动，其中心 O 的速度大小 $v_0=$ 常量。杆 AB 长 l，其 B 端用铰链与圆盘边缘相连接，

A 端放在水平面上，且 A，B 和 O 在同一竖直平面内。设圆盘的半径为 r，求 A 端的速度，并以转角 φ 表示之。

3.10　两平行板以速度 v_1 和 v_2 在板平面内运动，平板间夹一半径为 r 的圆柱，圆柱在平板间作纯滚动。求（1）圆盘的角速度和它中心点 O 的速度；（2）圆盘的动瞬心轨迹和定瞬心轨迹。分别考虑 v_1 和 v_2 同向和反向两种情形，并解释 $v_1=v_2$ 和 $v_1>v_2$ 时结果的意义。



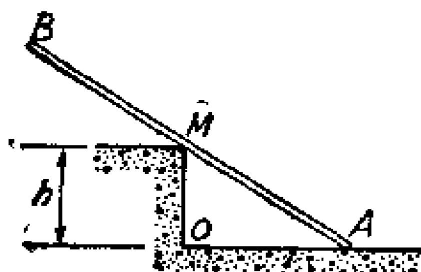
题 3.10 图



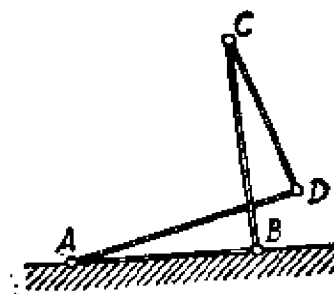
题 3.11 图

3.11　杆 AB 作这样的运动：A 点以 O 为圆心，r 为半径的圆周运动，而杆本身则始终通过圆周上的固定点 N。求杆的动瞬心轨迹和定瞬心轨迹。

3.12　图示杆 AB 在纸平面内运动，其下端沿 OA 滑动，速度为 v，杆本身则在任何时刻均通过 M 点，$OM=h$。求杆的定瞬心轨迹和动瞬心轨迹及杆的转动角速度。



题 3.12 图

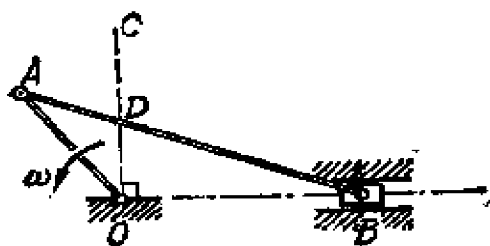


题 3.13 图

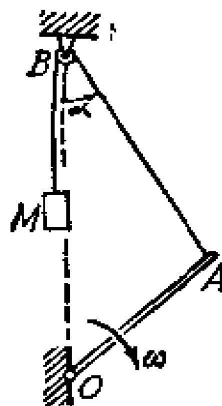
3.13　平面铰链机构由四杆组成（见图），$AD=BC=2a$，$AB=CD=2b\,(<2a)$，A，B，C 和 D 为铰结点，AB 杆固定。求

CD 杆的动瞬心轨迹和定瞬心轨迹。

3.14 曲柄连杆机构的曲柄 OA 以匀角速度 ω 绕 O 点转动。求证滑块 B 的速度大小为 $\omega\cdot\overline{OD}$，其中 D 为连杆 AB 与竖直线 OC 的交点，即 OC 垂直 OB。



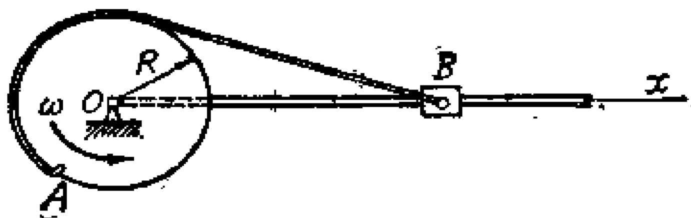
题 3.14 图



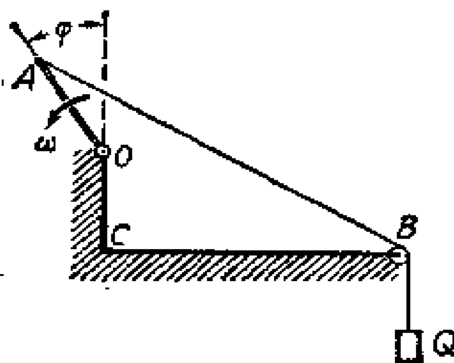
题 3.15 图

3.15 设杆 OA 以角速度 ω 绕 O 点转动，A 端连着绕过滑轮 B 的绳子，绳的另一端挂一重物 M，求 M 点的速度。已知 $OB=h$，$\angle OBA=\alpha$，绳子是不可伸长且始终是拉直的。

3.16 半径为 R 的轮子以角速度 ω 绕 O 轴转动，绳子一端 A 固定在轮缘上，绳子绕过轮子且另一端与滑块 B 相连，滑块 B 沿 Ox 轴运动，绳子是不可伸长且始终是拉直的，求滑块 B 的速度（以距离 $OB=x$ 的函数表示）。



题 3.16 图



题 3.17 图

3.17 杆 OA 以角速度 ω 绕其端点 O 转动，杆的另一端系一

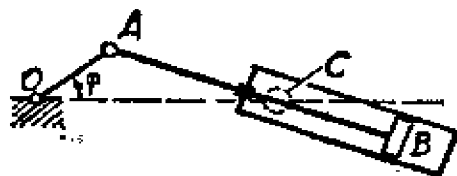
绳，此绳绕过滑轮 B 并悬有一重物 Q，求重物的速度与 φ 角的关系。已知 $OA=R$，$OC=a$，$CB=b$，绳子是不可伸长且始终是拉直的。

3.18 正方形薄板 $ABCD$，边长为 2 厘米，在其自身平面内运动。在某瞬时，A 点的加速度大小为 $4\sqrt{2}$ 厘米/秒²，方向沿对角线 AC；B 点的加速度大小为 8 厘米/秒²，方向沿 BC 边。求板在此瞬时的角速度，角加速度及 C 点和 D 点的加速度。

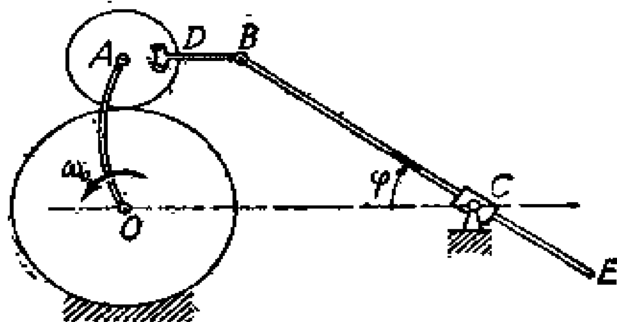
3.19 杆 AB 长 l，其两端速度的大小为 v_1 和 v_2，方向分别与杆的夹角为 α_1 和 α_2。求（1）杆上一点 M 的位置，这点的速度方向恰好沿着杆轴方向，并求这点速度的大小；（2）速度瞬心到杆轴的距离 h 及杆的瞬时角速度 ω。

3.20 一矩形薄板 $ABCD$ 在其自身平面内运动，角速度为常值 ω，$AB=a$，$BC=b$。在某一瞬时 A 点的速度大小为 v，方向沿对角线 AC，求此瞬时 B 点的速度。

3.21 在图示摆动汽缸式蒸汽机示意图中，曲柄 $OA=r$，C 为汽缸摆动轴，$OC=h$，曲柄 OA 以常角速度 $\dot{\varphi}=\omega$ 转动，求连杆 AB 的角速度（表示成 φ 角的函数）。



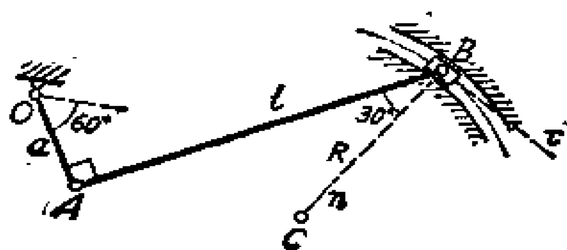
题 3.21 图



题 3.22 图

3.22 图示行星传动机构中，曲柄 OA 以常角速度 ω_0 绕 O 轴转动，BD 杆与动齿轮 A 固连。连杆 BE 在 B 点与 BD 杆铰接，并且 BE 杆始终通过 C 点。已知动齿轮半径为 r，定齿轮半径为 $2r$，$AB=R$。当曲柄 OA 在竖直位置（点 O 和 A 在竖直线上）时，

杆 BD 在水平位置，连杆 BE 与水平线 OC 的夹角为 φ。求 BE 杆上与 C 点重合的那个点的速度。



题 3.23 图

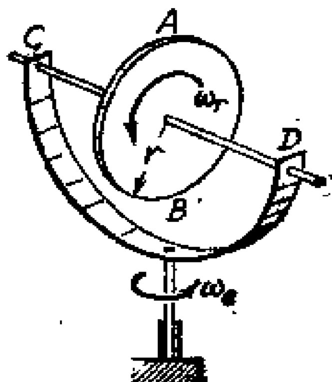
3.23 在图示曲柄连杆机构中，曲柄 OA 绕 O 轴转动，其角速度为 ω，角加速度为 ε。滑块 B 在圆心为 C，半径为 $R=2a$ 的圆形槽内滑动。$OA=a$，$AB=l=2\sqrt{3}$。在某瞬时曲柄 OA 与水平线成 60°角，连杆 AB 与曲柄 OA 垂直，且 AB 与圆半径 CB 的夹角为30°。求该瞬时滑块 B 的切向加速度 a_τ 和法向加速度 a_n。

3.24 长度为 l 的直杆 AB 在平面内运动，其角速度为 ω。杆的一端 A 在半径为 r，中心为 O 的圆周上运动，OA 线的角速度为ω'。证明：OB 线的角速度是

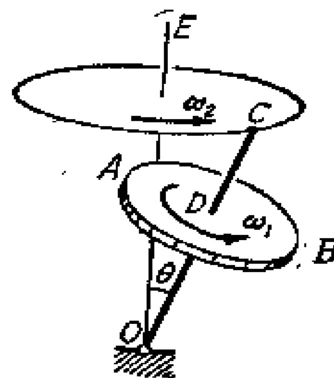
$$\Omega=[\omega(R^2+l^2-r^2)+\omega'(R^2+r^2-l^2)]/2R^2,$$

其中 R 为 B 点到中心 O 的距离。

3.25 半径为 R 的圆盘以常角速度 ω_r 绕水平轴 CD 转动，CD 轴以常角速度 ω_e 绕竖直轴转动。求圆盘边缘最高点 A 与最低点 B 的速度和加速度。



题 3.25 图

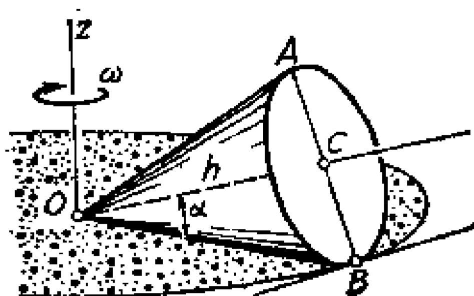


题 3.26 图

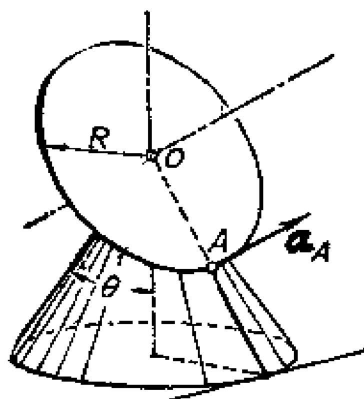
3.26　半径为 a 的转轮 AB 以角速度 ω_1 绕其对称轴 OC 转动，而 OC 轴以角速度 ω_2 绕竖直线 OE 转动。已知 $OD=b$，$\angle COE=\theta$，求转轮最低点 B 的速度。

3.27　高 $OC=h$，顶角为 2α 的圆锥在一水平面上滚动而不滑动。已知这圆锥以匀角速度 ω 绕竖直轴 Oz 转动。求锥体上最高点 A 的转动加速度 a_r、向心加速度 a_n 和全加速度大小 a。

3.28　半径 $R=4\sqrt{3}$ 厘米的圆盘 OA 在绕固定点 O 转动的



题 3.27 图



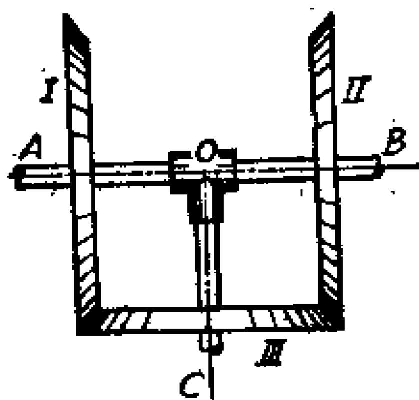
题 3.28 图

同时又在顶角为 $2\theta=60°$ 的圆锥上作纯滚动。如圆盘上任何瞬时的最低点 A 的加速度大小等于 48厘米/秒²，方向垂直于圆盘，求圆盘的角速度沿着圆锥对称轴和圆盘对称轴的分向量的大小 ω_1 和 ω_2。

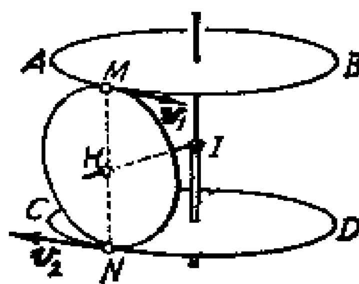
3.29　刚体绕固定点转动时欧拉角的变化规律为：自转角 $\varphi=nt$，进动角 $\psi=\dfrac{\pi}{2}+ant$，章动角 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，其中 a，n 为常量。求刚体的角速度和角加速度在固定坐标轴上的投影。又当 a 等于多少时才能使 Oxy 平面（固定坐标平面）成为定瞬时轴轨迹面？

3.30　一差动齿轮机构如图所示。AB 轴上安装两个可以自由转动的半径为 R 的锥齿轮Ⅰ和Ⅱ，其支轴 OC 上装一可以自由转动的半径为 r 的锥齿轮Ⅲ。齿轮间啮合情况如图。齿轮Ⅰ与Ⅱ的转速分别为每分钟 n_1 和 n_2 周。求（1）齿轮Ⅲ相对于 AB 轴的

角速度 Ω，（2）齿轮Ⅲ绕 OC 轴的角速度 ω_3（或每分钟转数 n_3），（3）齿轮Ⅲ的瞬时轴轨迹面。

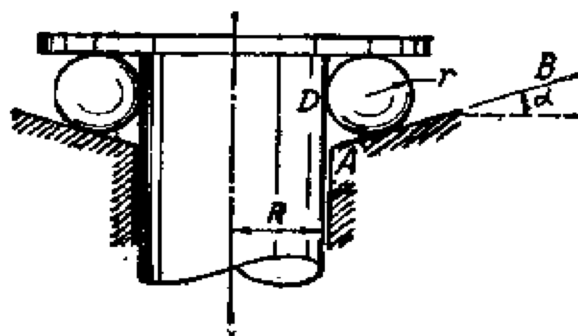


题 3.30 图



题 3.31 图

3.31 图示差速传动装置中，两圆盘 AB 和CD 的中心滑套在同一转动轴上。这两圆盘紧压着轮子 MN，轮子的转动轴 HI 和圆盘的转动轴垂直。已知轮子和两圆盘切点的速度各为 $v_1=3$米/秒，$v_2=4$米/秒，轮子半径 $r=5$厘米，$HI=\frac{1}{14}$米。求（1）轮子 MN 中心 H 的速度；（2）轮子 MN 绕 HI 轴的转动角速度；（3）轮子 MN 的绝对角速度和绝对角加速度。



题 3.32 图

3.32 图示止推轴承的的顶盖搁在一圈钢球上，这圈钢球放置在凹圆锥面内，沿圆周分布。设轴的半径为 R，球的半径为 r，且球与轴、锥及顶盖的接触处无相对滑动。又设球的瞬时角速度沿圆锥的母线 AB，求 AB 与水平面的夹角 α 应为多大？（提示：当$R/r=2$时，$\alpha=17°35'$。）

3.33 一物体绕坐标原点作定点运动。物体上 M_1 点(1,0,1)

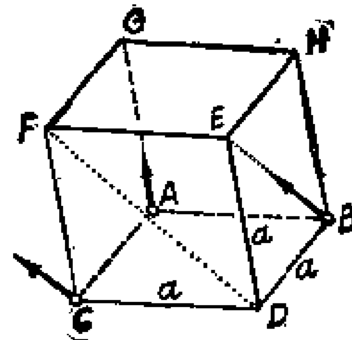
的速度大小为$v_1=4$米/秒，方向与x轴的夹角$\alpha_1=45°$，M_2点(3,4,0)的速度$\boldsymbol{v}_2$与x轴成α_2角，且$\cos\alpha_2=-0.8$。求物体的瞬时转动轴的方程和瞬时角速度的大小ω，点M_2的速度的大小v_2。

3.34 物体上一点在某瞬时的活动坐标为：$\xi=-a\cos\varphi$，$\eta=a\sin\varphi$，$\zeta=a$，式中a为常量。已知坐标架$O\xi\eta\zeta$的欧拉角为ψ,θ,φ。求这点在此瞬时的速度在活动坐标上的投影，以欧拉角及其导数表示之。

3.35 证明在规则进动中，即当欧拉角可用下式表示时：$\psi=at$，$\varphi=bt$，$\theta=c$(a,b和c都是常量)，物体的角加速度在活动坐标轴上的投影为

$$\varepsilon_\xi=ab\sin c\cos(bt),\ \varepsilon_\eta=-ab\sin c\sin(bt),\varepsilon_\zeta=0。$$

3.36 已知立方体每边长a，A点的速度大小是$a\omega_0$，沿AG方向；B点的速度大小是$a\omega_0\sqrt{2}$，沿BE方向；C点的速度大小是$a\omega_0\sqrt{2}$，方向平行DF，ω_0是常量。求这立方体的瞬时螺旋轴、移动速度、转动角速度和D点的速度。



题 3.36 图

3.37 飞机在A地和B地之间来回飞行，$AB=S$。飞机相对空气的速率为常值u，风速大小为常值v，方向与$\overrightarrow{BA}$成φ角。求飞机沿AB直线来回飞行一次所花的时间。

3.38 在同一平面上，直线AB以速度$\boldsymbol{v}_1$垂直于AB的方向移动，而直线CD以速度$\boldsymbol{v}_2$垂直于CD的方向移动，两直线的夹角是α。求两直线的交点M的速度$\boldsymbol{v}$。

3.39 一飞机相对于空气的速度大小u为常量，在等速v($<u$)的北风中作半径为a的水平圆周运动。当飞机的航向与正北向成φ角时，求它沿圆周运动时的速率；并证明，当$v\ll u$时，近似地有关系

$$a\dot{\varphi}=u\left(1-\frac{v}{u}\cos\varphi-\frac{1}{2}\frac{v^2}{u^2}\sin^2\varphi\right).$$

再证明飞机飞行一周所需时间近似地为

$$\frac{2\pi a}{u}\left(1+\frac{3v^2}{4u^2}\right).$$

3.40 半径等于R的圆盘，以等角速ω绕通过圆心并垂直盘面之轴转动。有一点沿圆盘之直径按$\rho=R\sin\omega t$的规律离开圆心而运动。求点的绝对速度和绝对加速度的大小。

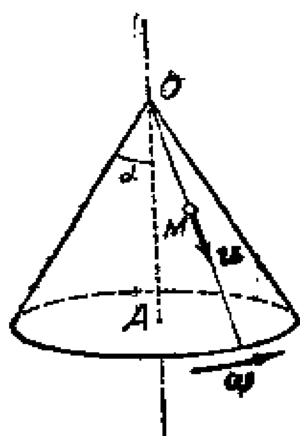
3.41 设河水流速各处均为v_1，河中一船以大小不变的相对速度v_2始终朝着岸上固定点A划进，求船的轨迹。又若$v_1=v_2$，则轨迹是什么曲线？

3.42 宽度为D的河流，河水的流速与到河岸的距离成正比，在河岸处水流速度为零，在河流中心处其值为c。一小船以相对速度u沿垂直于水流的方向行驶，求船的轨迹以及船在对岸靠拢的地点。

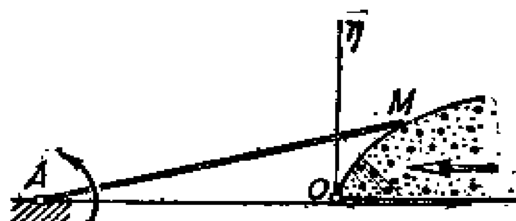
3.43 一直线以等角速ω在一固定平面内绕一固定端点O转动。当直线位于Ox的位置时，有一点M开始从O点沿这直线运动。如要使M点的绝对速度v的大小为常量，问M点应按何种规律沿这直线运动？又求M点的轨迹及加速度。

3.44 M点以相对速度u沿圆锥母线作等速直线运动，此圆锥则以等角速度ω绕其轴线OA转动，初始时M点在圆锥顶点O处。求运动开始后t秒时M点的绝对加速度的大小。假定圆锥体的半顶角为α（图见下页）。

3.45 凸轮以等速度v_0自右向左移动（见图），对于固连于凸轮上的坐标系$O\xi\eta$而言，凸轮外形的方程为$\eta=f(\xi)$。直杆AM长l，其一端以铰链固定于定点A，另一端M则搁在凸轮上。（1）求杆的运动角速度ω；（2）若要求杆以等角速ω_0转动时，求凸轮外形的方程。



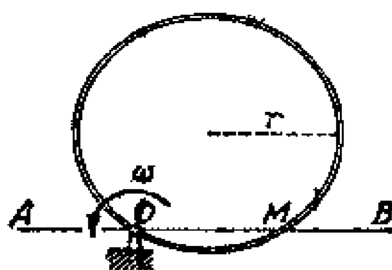
题 3.44 图



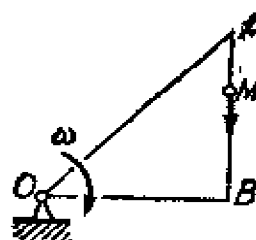
题 3.45 图

3.46　一半径为 R 的圆盘在半径为 $2R$ 的圆周内作纯滚动。求证圆盘边缘上任一点的轨迹为一直线。

3.47　直线 AOB 在平面上，一半径为 r 的圆环在平面内以角速度 ω 绕圆环上的固定点 O 转动，圆环与直线的另一交点为 M（见图）。求（1）M 相对于直线 AB 的速度及加速度；（2）M 相对于圆环的速度及加速度。



题 3.47 图

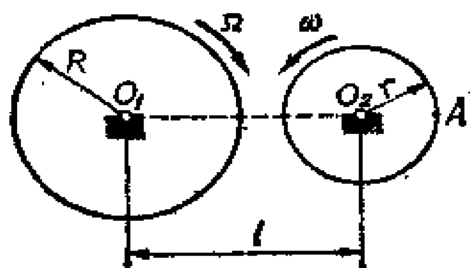


题 3.48 图

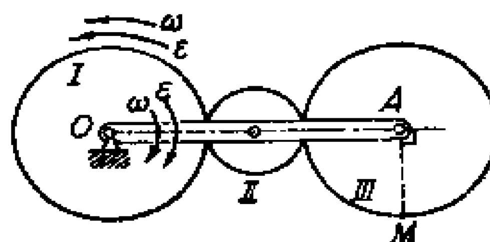
3.48　一等腰直角三角形 OBA 在其自身平面内以等角速 ω 绕顶点 O 转动，某一点 M 以不变的相对速度沿 AB 边运动。当三角形转了一周时，M 点正好走过 AB，已知 $AB=b$。求 M 点在 A 点时的绝对速度和绝对加速度。

3.49　同一平面内的两个圆盘以不同的等角速度同时绕它们的旋转对称轴 O_1 和 O_2 转动（见图）。两盘中心间的距离为 l，两

盘的半径和角速度如图所示，当小盘边缘上一点A位于最右端时，求A点相对于大盘的速度和加速度的大小及方向。

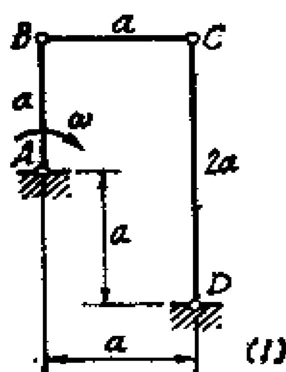


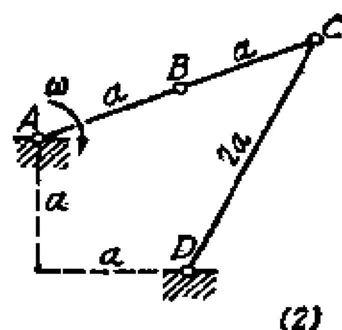
题 3.49 图



题 3.50 图

3.50　在图示传动装置中，半径为R的主动齿轮Ⅰ以角速度ω，角加速度ε作逆时针方向转动。长为$3R$的曲柄OA以同样大小的角速度和角加速度绕O轴作顺时针方向转动。M是半径为R的从动齿轮Ⅲ边缘上的一点，当AM垂直OA时，求M点的速度和加速度。

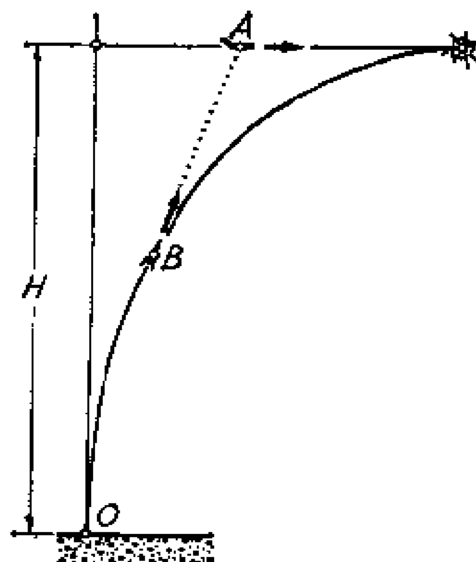




题 3.51 图

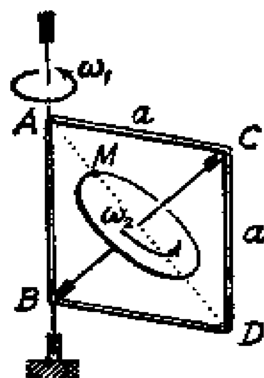
3.51　三根连杆AB，BC和CD用铰链相连，设$AB=BC=a$，$CD=2a$，AB杆以等角速度ω转动。求在图示两个位置C点的加速度：（1）AB与BC垂直；（2）AB和BC在一直线上。

3.52 飞机 A 以等速 V 沿水平航线飞行，高度为 H。当飞机在正上空时，由地面 O 发射一导弹 B，导弹始终瞄准飞机，且其速率为 $2V$。证明导弹追上飞机所需的时间为 $2H/3V$。



题 3.52 图

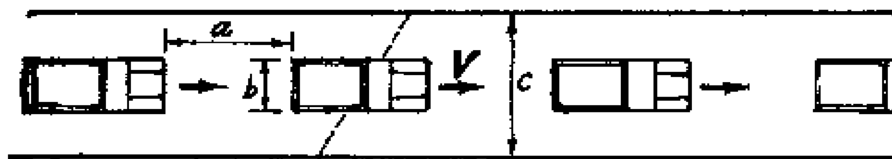
3.53 正方形框架边长为 a，以匀角速度 ω_1 绕 AB 轴转动。半径 $R=\frac{\sqrt{2}}{4}a$ 的圆盘以相对于框架的匀角速度 $\omega_2=\sqrt{2}\,\omega_1$ 绕 BC 轴转动。求圆盘边缘上 M 点的绝对加速度，M 点在该瞬时恰好在对角线 AD 上。



题 3.53 图

3.54 一串相同的汽车均以等速 V 沿着一条宽度为 c 的直线马路行驶，每辆汽车的宽度均为 b，自一车头到前面一辆车车尾的距离保持为 a。求证：一行人能以最小的匀速率沿着一条直线穿过马路所需的时间是

$$\frac{c}{V}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right).$$



题 3.54 图

3.55 两质点以均匀的速度沿着两条固定的、相交的直线运动.在 t_0 时刻两点之间的有向距离为 $\boldsymbol{D}$,它们的相对速度为 $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{V}$ 在 $\boldsymbol{D}$ 方向上的投影为 v_1,在垂直于 $\boldsymbol{D}$ 方向上的投影为 v_2.证明:两点之间的最近距离是 Dv_2/V,并且它们经过时间 $T=Dv_1/V^2$后到达此位置(从 t_0 时刻算起).

第四章　质点动力学

在静力学和运动学中，分别讲了力系的简化和平衡，以及对运动的描述，但没有涉及力和运动之间的关系。从这一章开始将分析力和运动之间的关系，这就是动力学。可以认为动力学是理论力学的主体，静力学是动力学的特殊情况，而运动学则是为动力学所作的必要的准备工作。在经典力学的范围内，牛顿定律是动力学的基础，也是力学这门学科的基石。尽管读者曾经多次学过用过牛顿定律，但是我们还要略费笔墨，讲述一下牛顿定律的内容及意义。

4-1　牛顿定律

牛顿定律是关于机械运动的基本规律，它是从哪里来的？人类对自然界客观规律的正确认识，只能从实践中来。在牛顿以前，人类在长期的生产实践中，已经认识并总结了不少动力学的规律，其中有正确的，也有片面的或者错误的。在正确的部分中，也往往是定性的，还不能做到定量的。为什么只有到了牛顿那个时期才有可能归纳出称得上精确科学的规律？为什么这些定律并不是从生产实际中归纳出来而是从大量天文观测的资料中得出来？这些都必须从生产、科学和社会的历史条件进行分析。

在我们面前放着两本书：一本是意大利伽利略(1564—1642)的《关于托勒玫和哥白尼两大世界的对话》①，1632 年出版，另一本是我国明末宋应星(1587—清顺治年间)的《天工开物》，出版于

① 有汉译本，上海人民出版社，1974 年，以下简称《对话》。

1637 年（明崇祯十年）。它们是同一年代的两本闻名世界的科学著作，而且都受到封建势力的压迫或歧视。伽利略因《对话》而受审讯，监禁终身；《天工开物》在故土无用武之地，飘落异邦，直到民国年间才从日本借回国内重版。但是，两者在科学史上又有着不同的代表性：《对话》表明了近代实验科学、精确科学的开始，伽利略开创的对力学规律的探讨，后来为牛顿所继承与发展；《天工开物》表明了中国古代辉煌科技成就的终结，在宋应星时代之后，中国不得不从西方输入先进的自然科学，其中包括力学。伽利略不仅在比萨(Pisa)斜塔上作落体实验，驳倒了古代权威亚里士多德“轻重落体速度不同”的不正确观点，而且在《对话》中运用推理来论证其错误①；《天工开物》则只能局限于归纳各种生产技术的经验，也有诸如对船体运动的力学分析，但还不能说有什么科学实验和精确科学的讨论。在伽利略之后，牛顿在开普勒行星运动三定律②的基础上，进一步提炼出运动基本定律，为物理学奠定了牢固的科学基础。在我国，尽管早在六世纪，张子信也作过三十年③的天文观测，而且发现了“日行盈缩”（见 4-5 例 4.15）的规律，但是即使到了明末清初，象宋应星这样杰出的科学家，也仍然不相信地球是圆球④。尽管在伽利略时代，我国在天文学观测方面的成果与西欧旗鼓相当⑤，西方的研究情报

① 亚里士多德断言，两物体落下重者速度大，轻者速度小，大家都信以为真。但伽利略却反问道，如果将轻重两物体绑在一起落下，速度如何？从而将亚里士多德的论点引入自相矛盾的窘境。

② 开普勒接受了他的老师第谷·布拉赫二十多年天文观测资料，在此基础上又花费了毕生的精力总结出开普勒运动三定律。

③ 北齐(550—577)时期。

④ 见宋应星《谈天·日说》(1637 年)，他认为每天早上由气形成太阳，太阳落山不过如“飘炭之熄”罢了。

⑤ 明崇祯年代(1634 年)徐光启等编《崇祯历书》和《月离历指》书中所附的两个月面图，一个是初四的月面图，一个是上弦的月面图，都和伽利略的著作《星际使者》(1610 年)所载的月面图相同。《月离历指》称“月之实径与地球径若二与七”，这也和伽利略测定的月球直径与地球直径长度的比是二比七的数据相符合。《崇祯历书》中的《测天约说》称金星和月相一样“有时晦，有时光满，有时为上下弦”，这和伽利略给开普勒信中所说的略同。

也开始传入我国①，但是天文知识却得不到重视，天文往往被用来为"天命论"服务。可见在中国，当时要独立发现力学规律还缺乏必要的基础，"奈端重学"（牛顿力学当时的译名）只能从西方引入②。我们不禁要问，这是为什么？单从生产斗争和科学实验方面找原因就不够了，这与当时的社会制度有密切的关系。当时西欧是资本主义社会的上升时期，中国是处在没落的封建社会的后期。新兴的资产阶级要扩大殖民地，要办工业。发展生产要造机器，打仗要研究炮弹的飞行轨道，这是地上的力学。航海要观察星星（当时西班牙政府等就曾悬赏过测定经度的办法。纬度是容易测定的，为什么？），这需要天上的力学。这些都是促进力学发展的背景。反过来，没有先进的工业技术作支柱，例如没有精密的望远镜，又很难对天文观测积累精确的系统的科学数据。总之，新兴的资本主义社会解放了生产力，发展了生产技术，推动了科学的发展，而在中国则是没落的封建社会制度束缚了科学的发展。这就是为什么尽管中国是天文观测发展得最早的国家之一，而后来却大大落后于西欧的重要原因。

那么，为什么牛顿定律来自天文观测资料，而不能从工业生产甚至日常中的现象（如马拉车）归纳出来呢？这是因为在马拉车这类问题中，力学（机械运动）现象与其他运动形式的现象混在一起，各部分相互作用的关系错综复杂，力学规律难于单独显示出来，而在行星运动中，行星可以当作质点，太阳可以当作固定点，运动学和动力学的关系比较单纯，并且可以认为在研究行星与太阳之间的运动关系时，其他行星或者因为小，或者因为远而不起作用。马克思说过："物理学是在自然过程表现得最确实、

---

① 我国出版的《天问略》（1615年）称："近世西洋精于历法一名士（指伽利略），务测日月星辰奥理……则造创一巧器（指望远镜）以助之"。在《崇祯历书》中也多方面谈到有关伽利略在天文学上的贡献。

② 虽然西方关于静力学的知识（包括伽利略著作中的一些材料）在王征（1627年）所译《远西奇器图说》中已有介绍，但动力学（包括牛顿运动三定律及万有引力定律）则晚到李善兰1858年所译《重学》及1859年所译《谈天》（天文学）中才有说明。

最少受干扰的地方考察自然过程的，或者，如有可能，是在保证过程以其纯粹形态进行的条件下从事实验的”（《资本论》第一版序言）。在牛顿那个时候的生产技术条件下，在地面上还找不到这样好的科学实验条件。当然在今天的技术条件下，我们有可能在实验室内研究牛顿定律了。科学的基本规律来自于实践，人类的实践包括阶级斗争、生产斗争和科学实验。科学实验这个实践活动是无法完全由生产斗争来取代的。

牛顿定律来自于实践，还得由实践来验证。牛顿定律首先也是在天文观测中受到考验。天王星是1781年被发现的，十九世纪上半叶，观测和理论计算的精度都有了提高，人们发现天王星的实际轨道和用牛顿定律计算出的偏差（1845年达到2角分）超出了观测和计算的误差范围。1864年法国的勒威耶提出[1]，假设在天王星外面的轨道上有一定质量的新行星，就可以解释这种现象，并按已知行星距离分布的波得（Bode）定律推论它离太阳约38天文单位。勒威耶根据牛顿定律预言这颗星的日心经度，并写信告诉了德国的天文学家伽勒（Galle，1812—1910）。伽勒在收到信后只化了半小时，就用望远镜观察到了这颗新行星，即海王星。它的日心经度的观察值与理论值仅相差0°52′，但它离太阳的距离是30而不是38天文单位。可见波得定律对较远的行星是不精确的。海王星的发现，反过来证实了牛顿定律的正确性，这也反映了理论对实践的反作用。

牛顿定律和其他物理定律一样，是相对真理。无数相对的真理之总和，就是绝对真理。当人们在实践中发现定律对某些问题不适用时，就要进一步去探索新的规律，以此对旧的规律作出修正。例如，当用牛顿运动定律计算水星的轨道时，勒威耶发现它的近日点每一百年转过的角度（叫做轨道的进动）比实际观

---

① 英国的亚当斯（Adams，J.C.，1819—1892）和勒威耶（Leverrier，U. J. J.，1811—1877）同时独立地推算了新行星的位置。

测到的多45″±5″。为了解释这个差别，有人曾设想修正万有引力公式，把分母中距离的幂次由2修改为2.00000016，或者在万有引力的表达式中加上一些修正项（见4-7）。这样一来，虽然水星轨道进动的问题得到了解决，但对其他行星又不适合了。直到1915年爱因斯坦提出广义相对论后才解决了这个难题。由广义相对论的计算推出，由于太阳引力场引起的附加进动，正好是每百年43″（水星离太阳最近，因此这种广义相对论效应最强，对于其他行星来说，就要小得多）。牛顿定律及万有引力定律无法解释的客观现象，为广义相对论完满地说明了，人们对客观世界的认识又向前迈进了一步。有了新的认识，并不需要全盘抛弃旧的东西，牛顿定律对于大量科学和技术问题还是足够精确的。

牛顿的运动定律最早见于他的《自然哲学的数学原理》。这本书1687年出版，是用拉丁文写的。书中在序言和几条说明后，提出了"运动的基本定理或定律"。下面是1931年郑太朴的汉译本①中关于三定律的译文。

"第一定律　每个物体倘非有外力影响使其改变状态，则该物体仍保持其原来静止的或等速直线运动的状态。"

"第二定律　运动之变化，与动力之作用相比，其所循方向则为力施作用的方向。"

"第三定律　作用恒与其反作用相等，或，二物体之相互作用恒等，方向则恒相反。"

"系②1　二力连结时，物体即循一平行方形之对角线，其所用时间，一如力单独时循各边所需者。"

对于上面的译文，我们可以按照现代的理解来看待这些定律。第一定律中所说的物体，其实是指质点。关于第二定律中的

---

① 《自然哲学之数学原理》，目前唯一的汉译本，1957，1958年重印过，商务印书馆版。十九世纪李善兰在译完《重学》《谈天》后，又着手译牛顿的这一著作，未完成。

② 系就是推论。

"运动"，牛顿在"说明 2"中解释过，"运动之量，以速度及物质之量联合度之"。所以，如果用数学符号来表示，m 代表质量，v 代表速度，F 代表施加于质点的力，那么第二定律的数学表达式（在选取适当的单位制后）是

$$\frac{d}{dt}(mv)=F。$$

或者，在 m 是常量时，可写成大家熟悉的形式

$$ma=F。$$

这个式子中的质量 m，照牛顿原著的"说明 1"，是"物质之量，以其密度及体积联合度之"。今天看来，这个说法并不确切，质量应该是惯性大小的量度。质量这个名词最好是改成"惯量"或者"移动惯量"，它和物体作转动时的"转动惯量"（见第六章）是同一个性质的物理量。但是历史上已经形成了"质量"这个名词，我们也只能"约定俗成"了。牛顿第二定律中的质量是惯性质量，牛顿万有引力公式（$F=\gamma Mm/r^2$，其中 $\gamma=6.672\times10^{-8}$ 厘米^3/秒^2·克，是万有引力常数）中的质量是引力质量。它们原是具有不同物理含义的，但是测量表明，两种质量几乎是相等的。贝塞尔（Bessel）测出两者的相对差（差值比原值）不到 10^{-5}，1890 年厄阜（Eötvös）的著名实验表明两者相差不到 10^{-9}。近年来的实验结果①已证实相差不到 10^{-12}。爱因斯坦把引力质量等于惯性质量作为广义相对论的基本公设。在我们这门课程中对惯性质量和引力质量将不加区别。

有人认为，第一定律是第二定律的一个特殊情况（当 $a=0$ 时），似乎是可有可无的。这种看法不妥。其实第一定律是第二定律所不可缺少的前提，因为第一定律为整个力学体系选定了一类特殊的参考系——**惯性参考系**。在第一定律中虽然没有明确说，但是却隐含着这样一层意思，只有对某些参考系来说，第一定律

① Брагинский 和 Панов，Жур. эксп. и теор. физ，1971，1972，得相差小于 9×10^{-13}。

所叙述的结论才是正确的，因而才能进一步谈及第二定律。我们在讲运动学（第二章，第三章）时，对选哪一个参考系，完全是为了解题的方便，是可以任意的。但是在动力学中，因为要用到牛顿定律，必须严格区分惯性参考系（不受外力的质点在其中保持等速直线运动或静止的参考系）和非惯性参考系。只有对于惯性系，我们才可以用 $m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}$ 这个表达式。对于非惯性系，就不能简单地用这个表达式（详见第八章）。

设我们已经知道有一个参考系 S 是惯性系，在其中质点不受力时加速度为零。如有另一个参考系 S'，相对于 S 作等速直线平动，那么根据第三章中相对运动的加速度变换公式(3.39)，显然这个不受力的质点在 S' 中的加速度也等于零，因而 S' 也是惯性参考系。由此可见，一切相对于惯性参考系作等速直线平动的参考系都是惯性参考系，这样的参考系有无限多个。

在实际计算中，哪些参考系是惯性系呢？例如对限于在地面上运动的一般工程问题，地球可以当作一个惯性参考系（不大精确）。根据上面所说，任何在地面上作等速直线平动的物体（例如在直线轨道上等速行驶的车厢）都可以作为惯性系。如果物体运动的尺度很大，我们研究的问题精度要求又很高，那么地球自转的影响就必需考虑，此时地球就不能算是惯性参考系了，应取地心系为惯性参考系。再进一步，在分析行星运动时，又不能把地心系作为惯性系了，因为地心系本身在作公转，我们必须取日心参考系。是否还要进一步考虑太阳本身在银河系中的运动呢？研究表明，太阳本身在银河系中的加速度大概是 3×10^{-8} 厘米/秒^{2}的数量级，一般说来，它可以不必考虑了，日心参考系是一个足够精确的惯性参考系。

关于牛顿第三定律，即作用与反作用定律，我们已在静力学中讨论过。不论在静力学问题和动力学问题中，牛顿第三定律都是适用的。顺便指出，这一条定律是与参考系的选取无关的。在经常所遇到的接触力和引力的情况中，作用和反作用力不仅大小

相等、方向相反，而且还可以补充：它们的作用线相同（在牛顿的原文中并无这点意思）。

最后，上面转引牛顿原文中的“系 1”实际上就是说明力的合成定理（郑太朴译文中的“平行方形”就是我们现在所说的平行四边形），有的书上把这一条算作牛顿第四定律。因为第二定律只是对单个力而言的，如果没有这一条，就无法对力系作用下的质点来谈牛顿第二定律。通常习惯于称牛顿的三个定律，而把这最后一条当作静力学中的基本公理或力的基本性质看待，我们也照此惯例行事。

根据牛顿的原意以及上述若干说明，我们可以写出以下基本定理，作为动力学的基础。

基本定理　质量为m的质点，受到力系 $\boldsymbol{F}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的作用，在惯性参考系中的加速度为 $\boldsymbol{a}$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i=m\boldsymbol{a}. \tag{4.1}$$

显然，质点平衡条件（也就是共点力系的平衡条件）$\sum\boldsymbol{F}=0$ 是上式 $\boldsymbol{a}=0$ 时的特例。

以牛顿定律为基本定律的力学叫做**牛顿力学**或**经典力学**。它的适用范围在两方面受到限制，下面我们简要地介绍这个问题。

首先，我们研究的运动对象，其速度要远远小于光速 c（$c=3\times10^{10}$厘米/秒）。在经典力学中，认为空间与时间是无关的，照牛顿的说法，存在着与运动无关的绝对空间与绝对时间。实际情况是，当运动速度与光速可以相比较时，和运动紧密联系着的空间与时间之间的相互关系就不能被忽视了，此时一般地应以相对论力学代替经典力学。

设有两个惯性参考系 $S(O,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ 和 $S'(O',\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$

(图4.1)，相对作等速平动，S'相对S的速度为$\boldsymbol{u}=u\boldsymbol{e}_1$。设点$M$在$S$中的空间坐标为$(x_1, x_2, x_3)$，时间为$t$。同一点$M$在$S'$中的坐标为$(x'_1, x'_2, x'_3)$，时间为$t'$(要注意，是$t'$而不是$t$，两者是不相同的)。假定$t$和$t'$都从$S$与$S'$重合时刻作为零，那么相对论中的洛仑兹(Lorentz)变换公式给出了两者之间的关系，它们是

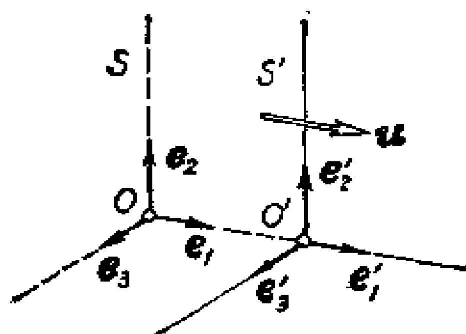


图4.1 两个惯性参考系

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ ct' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ct \end{bmatrix},$$

其中c是光速，$\beta=u/c$。这个式子表明，时间和空间是相互联系着的，因为从中可以得到关系式

$$x'_1=\frac{x_1-\beta ct}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{x_1-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}},$$

$$t'=\frac{-\beta x_1+ct}{c\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{t-x_1u/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.$$

新参考系S'中的时间t'并不等于参考系S中的时间t，而是与坐标x_1有关，并且也与速度u有关。

显然，同一个点M在S中的加速度$\frac{d^2x_1}{dt^2}$和在S'中的加速度$\frac{d^2x'_1}{dt'^2}$是不相等的。即使牛顿定律在惯性系S中成立，那么在与之作相对等速平动的参考系S'(照经典力学的观点它也是一

个惯性系）中就不能成立了。

只有在$u \ll c$，即$\beta \ll 1$（当然还需要质点在两个参考系中的速度也$\ll c$）时，可以略去β^2级的微量，于是洛仑兹变换简化成为经典力学中的伽利略变换

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\beta c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ t \end{bmatrix}.$$

即

$$x'_1 = x_1 - ut, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3, \quad t' = t.$$

从中看出，时间尺度是与其他物理量无关的绝对量，于是可导得

$$\frac{d^2x'_1}{dt'^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2}.$$

即质点在两个参考系中的加速度相同，牛顿定律在S中成立就意味着在S'中也成立。

相对论力学是在速度很大的情况下对经典力学的一种否定，但是在速度很小的时候又包含了经典力学，承认了经典力学。在本课程中所遇到的问题，一般地不必去顾虑经典力学是否够用。譬如，即使研究飞向行星的火箭这样高速的物体，它的速度数量级是10^6厘米/秒，比光速3×10^{10}厘米/秒还小四、五个量级，上述β^2约为10^{-9}。

其次，经典力学研究的运动对象不能太小。对于研究对象为原子（大小以一埃$=10^{-8}$厘米数量级计算，质量以10^{-24}克数量级计算）以及比它还要小的基本粒子，一般地应该用量子力学或物理学的其他分支学科。前面曾指出，光速c这个物理量，可以作为一个标志，根据它可以简单地判别，什么情况下可以用经典力学，什么情况下应该考虑相对论效应。在经典力学与量子力学之间，也有一个类似的常数，叫普朗克(Planck)常数$h=6.626\times10^{-27}$尔格·秒。这个常数的量纲是[时间]×[能量]=[长度]×

[动量]=[动量矩]。具有这种量纲的物理量通常称为作用。对于一个物理体系，如果表征系统状态的某个作用量（由位移、速度、动量、动量矩或能量组成）具有可以与普朗克常数 h 相比较的数值时，一般地这种体系的行为应该用量子力学来描述。反之，当每一个具有作用量纲的变量用 h 来度量时都非常大，则经典力学就在足够精确的程度上是有效的。例如，如果我们研究一个质点的微小振动，设它的质量 $m=1$ 克，最大速度 $v=1$ 厘米/秒，最大振幅 $x=1$ 厘米。因此，它的最大动量 $p=mv=1$ 克·厘米/秒，它具有作用量纲的物理量为 $x\cdot p=1$ 尔格·秒。这在一般工程问题中是很小的量，但这个量大于普朗克常数约 10^{26} 倍。由此可见，在通常的工程问题中，经典力学已足够精确，不必考虑是否要使用量子力学。

下面我们将以式(4.1)为基本出发点①来推导出动力学的全部理论，以解决各种问题。

4-2 质点的运动微分方程

质点的加速度 $\boldsymbol{a}$ 与向径 $\boldsymbol{r}$ 的关系已由运动学给出，它是 $\boldsymbol{a}=d^2\boldsymbol{r}/dt^2$，将它代入式(4.1)，就得出质点的向量形式的运动微分方程

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\sum\boldsymbol{F}. \tag{4.2}$$

上式也称为质点的动力学方程，在不致与运动学中的运动方程相混淆的情况下，也简称为质点的运动方程。这个方程给出了质点的运动量和所受的力之间的关系。等式左边是运动量，已在运动学中详细讨论过；等式右边是共点力系的合力，已在静力学中讨论过。质量 m 是惯性的度量，上一节中已说过，认为它与引力质量是一致的。在工程应用中，我们通常是通过质心的重力（即重

① 我们将在第十章中讨论是否还可能有其他的基本出发点。

量）来确定质量的。如果质点在地球表面附近自由下落时加速度的大小为 g ①，质点的重量是 W ②，则根据式(4.1)有 $mg=W$，得 $m=W/g$。设地球的质量是 M，质点在地球表面离地心距离是 R，其重力加速度大小记作 g_0。则有关系式

$$mg_0=\gamma mM/R^2.$$

由此得地面的重力加速度为 $g_0=\gamma M/R^2$，其中 γ 是万有引力常数。

当质点在地球表面以上高度为 h 的地方时，应该有关系式

$$g=\frac{\gamma M}{(R+h)^2}.$$

可见 h 越大，g 就越小，物体在山上比山下要稍微轻一些。在一般情况下，$h\ll R$，故有

$$g=\frac{\gamma M}{(R+h)^2}=\frac{\gamma M}{R^2}\left(1+\frac{h}{R}\right)^{-2}\approx g_0\left(1-2\frac{h}{R}\right).$$

所以通常就近似地把 g_0 当作 g，取数值 9.80 米/秒²。

在国际单位制(SI)中，质量的单位是千克，力的单位是牛顿(1 牛顿=1千克·米/秒²)。在工程单位制中，力的单位是公斤，于是质量的工程单位（没有专有的名称）是

1工程单位质量=1公斤·秒²/米。

质量为 1 工程单位的物体在地面上的重量是 9.8 公斤。目前在我国两种单位制并用，但在计算中应注意公斤力和千克质量的差别（两者在英文中是一个字，kilogram）。如有疑问时，可以用量纲检查，即几个物理量之间的量纲关系是

[力]=[质量]·[长度]·[时间]⁻²。

现在再回到式(4.2)。在运用这个式子时通常会遇到两类问

① 由于地球自转的影响，g 随质量所处的纬度略有变化，详见 8-3.

② 在工程问题中，一般是以地球为参考系。在要求不太精确的问题中，地球自转的影响可以忽略。此时重量就是地球对质点的引力。

题，一是已知运动求力；二是已知力求运动。此外，也可能在同一个研究对象中两类问题兼而有之，即已知运动的一部分和受力的一部分，要求另一部分未知的运动和力。

如果点的运动情况已知，即运动方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 是已知函数，或者在某一坐标系下，点的坐标（比如直角坐标系中的 x,y,z）是时间 t 的已知函数。根据第二章的结果，通过求导数运算可以求出加速度 $\boldsymbol{a}$，然后根据式(4.2)求出未知力。所以已知运动求力这一类问题比较容易解决。

例4.1 由开普勒运动定律求太阳对行星的引力。

在 2-3 例 2.11 中，已经由开普勒定律导出行星的加速度，它指向原点(太阳)，大小与到太阳的距离平方成反比。所以，根据式(4.2)可知，行星受到的力与行星的质量成比例，与它到太阳距离平方成反比，写成数学形式为

$$\boldsymbol{F}=-\frac{km}{r^2}\boldsymbol{r}^0=-\frac{km}{r^3}\boldsymbol{r}. \quad \blacksquare$$

我们之所以能如此轻易地解决了牛顿当时所面临的上述难题，是因为利用了现成的牛顿定律(4.2)以及运动学中的结论(在数学上用到了向量微分这个工具)。牛顿为此花费了毕生的精力，决不是如一些轶事所传说那样，他单凭见到苹果从树上掉下来，就想出了万有引力定律。牛顿曾经说过："我之所以看得远，是因为我是站在巨人的肩膀之上。"那么我们今天也正是站在包括牛顿在内的无数巨人的肩膀之上，才能不断地攀登科学的高峰。

动力学的另一类问题是已知力求运动。动力学的全部内容主要是围绕这个问题而展开的。

所谓力是已知的，是指力这个向量是某些变量的已知函数。最简单的情况是力为大小和方向都不变的常向量。力可能是时间的函数，比如在振动问题中，扰动力是时间的正弦型周期函数。力也可能与质点的位置有关，如万有引力。有些力还可能与质点的速度有关，例如质点在介质（水、空气等）中运动时所受

到的阻力就是这样，在速度不太大时可以认为阻力 $\boldsymbol{F}$ 与速度 $\boldsymbol{v}$ 有关系式 $\boldsymbol{F}=-c\boldsymbol{v}$ ①，c是一个正常量，这表示力的大小与速度的大小成正比，力的方向始终保持与速度反向。一般说来，作用在质点上的合力可以是时间 t，位置 $\boldsymbol{r}$ 和速度 $\boldsymbol{v}$ 的已知函数，即

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}).$$

于是式(4.2)可写成

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F}\left(t,\boldsymbol{r},\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right). \tag{4.3}$$

这是一个向量形式的二阶常微分方程，它的解 $\boldsymbol{r}(t)$ 就是我们要求的运动。适合这一微分方程的有一族解。为了确定起见，必须求出在一定起始条件下的特解。比如说，同样在地心引力作用下，人造卫星可以有各种各样的运动轨道，只有在给定了人造卫星发射的初始位置和初始速度，才能求出一条确定的轨道。因此，一个动力学问题在数学上通常就化成为一个常微分方程的初值问题。即已知质点在某一时刻 $t=t_0$ 的位置和速度：

$$\boldsymbol{r}(t_0)=\boldsymbol{r}_0,\qquad \left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_{t=t_0}=\boldsymbol{v}_0,$$

求解方程(4.3)。

根据常微分方程的理论可知，当已知函数 $\boldsymbol{F}\left(t,\boldsymbol{r},\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)$满足一定条件②时，解总是存在，而且是唯一的。因此，从原则上说，只要式(4.3)中的 $\boldsymbol{F}$ 的函数形式给定了，且初始位置 $\boldsymbol{r}_0$ 和初始速度 $\boldsymbol{v}_0$ 为已知，就可以完全决定 $\boldsymbol{r}$ 与 t 的关系。即质点的运动轨迹和质点在这轨迹上任意时刻的位置都完全确定了(图4.2)。也就是说，必定存在一个向量函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t,\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{v}_0),$$

它满足方程(4.3)和初始条件。

① 见4-3 例 4.3.

② 在通常的力学问题中，这些条件都能被满足。

但是，对于大多数问题，要想写出解的分析表达式却是十分困难的，甚至根本做不到。为此在力学中就发展了各种方法，比如在精确的表达式求不出来时就求近似表达式（近似法），在写不出解的分析表达式时就仅讨论解的某些可能的性质（定性法）等等。特别是因为所解的是力学问题，在许多地方有明显的物理意义，因此可以利用物理上的考虑与数学上的演算相互配合，使问题得到解决，或部分地得到解决。

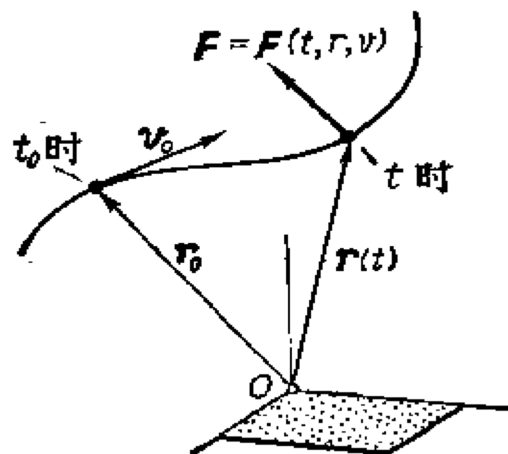


图4.2　r 完全决定于 F 的函数形式和 r_0，v_0

在某些特殊情况下，可以从向量形式的微分方程(4.3)直接求出运动，举例如下。

例4.2　求质量为 m 的质点在常力 $\boldsymbol{F}$ 作用下的运动。已知 $t=0$ 时初位置为 $\boldsymbol{r}_0$，初速度为 $\boldsymbol{v}_0$。

解　质点的运动微分方程是

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F}\text{（常向量）。}$$

将上式写成

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{1}{m}\boldsymbol{F},$$

对 t 积分一次，得 $\boldsymbol{v}=\frac{t}{m}\boldsymbol{F}+\boldsymbol{c}_1$，$\boldsymbol{c}_1$ 是待定的常向量。将 $t=0$ 时 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0$ 代入，求得 $\boldsymbol{c}_1=\boldsymbol{v}_0$。于是得速度的变化规律为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\frac{t}{m}\boldsymbol{F}.$$

再利用 $\boldsymbol{v}=d\boldsymbol{r}/dt$ 代入并积分得

$$r = tv_0 + \frac{t^2}{2m}F + c_2,$$

其中积分常向量 c_2 由初条件 $r|_{t=0} = r_0$ 求得 $c_2 = r_0$。于是质点的运动方程为

$$r = r_0 + tv_0 + \frac{t^2}{2m}F.$$

至此问题虽然已经解完，但我们并不容易从这个向量式子中看出运动的轨迹形状。下面我们用坐标表示方法进行一些分析。

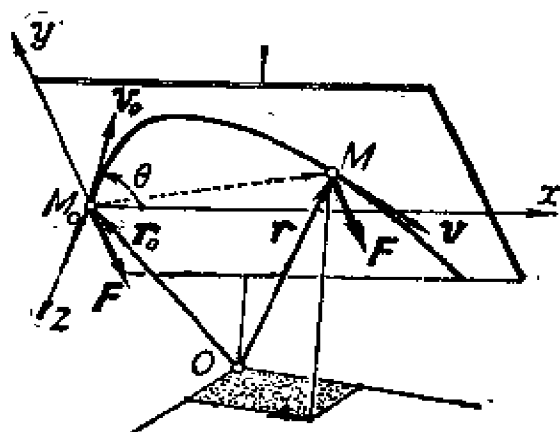


图4.3　常力作用下质点的运动

首先，我们指出质点总是在某一平面上运动（见图4.3）。因为质点的位移向量是

$$\overrightarrow{M_0M} = r - r_0 = tv_0 + \frac{t^2}{2m}F,$$

其中 v_0 和 F 是常向量，t 为参数。可见 $\overrightarrow{M_0M}$ 一定在由 v_0 和 F 所决定的平面内。就在这个平面上，取单位向量 j 与 F 反向，i 与 j 垂直，并取 $k = i \times j$。这样就取定了一个直角坐标系 $[M_0, i, j, k]$。

将上述向量形式的解，在此坐标系中投影，得到（请读者自行完成具体运算）：

$$x = v_0 t \cos\theta,$$

$$y = v_0 t \sin\theta - \frac{F}{2m}t^2,$$

$$z = 0,$$

其中 θ 是 v_0 与 i 的夹角，F 是力的大小。显然，这是 x-y 平面内抛物线的参数方程。由此可见，质点的运动轨迹是抛物线。∎

从上例中看出，直接由向量形式的微分方程(4.3)求解是不

方便的，因为即使是解求出来了，也不容易看出运动的规律，更何况在许多情况下并不容易求出解。我们通常采用的方法是先取定坐标系，将(4.3)写成三个分量形式的微分方程，相应地把初条件也写成三个分量形式，然后再去求解。在解决各种具体问题时，原则上是选用任意的坐标系都行，但是选取合适的坐标系能使解题步骤简化。

4-3 质点的一维运动

只需用一个变量(作为时间 t 的函数)来描述的运动叫做一维运动。质点沿直线的运动是一维运动。平面单摆的摆锤（当作质点看）虽然作的不是直线运动，但也只需一个变量就可以描述其运动，因此也是一维运动。一般说来，如果质点沿已知轨线运动，则可用弧长 s 来描述其运动，s 是时间 t 的函数，这就是一维运动。

一维运动只涉及一个数量形式的二阶常微分方程。以直线运动为例，在直线上取单位向量 $\boldsymbol{i}$，则质点的加速度为 $\boldsymbol{a}=\ddot{x}\,\boldsymbol{i}$，根据方程式(4.3)得到此质点的运动微分方程为

$$m\ddot{x}=F(t,x,\dot{x})。$$

初条件是：$t=0$ 时 $x(0)=x_0$，$\dot{x}(0)=v_0$。下面将通过一些例子说明一维动力学问题的具体求解方法。

例4.3 质点在阻尼介质中的降落。质量为 m 的小球在某一介质（如空气、水或油等）中自由落下，初速为零。求质点的运动规律。

解 取 x 轴向下为正，出发点为原点。质点共受两个力的作用。重力大小为 mg，方向垂直向下，所以可写成 $mg\boldsymbol{i}$。另一个力是介质所给的阻力。物体在介质中运动的阻力，方向总是与速度方向相反，大小与物体的形状，外表的光滑程度，介质的密度、粘度，物体的速度等等因素有关，这需要用流体力学来确定。以

最简单的情况——小圆球在流体中的运动为例，实验表明它遇到的阻力大小是

$$F=CS\cdot\frac{1}{2}\rho v^2.$$

式中 S 是圆球截面积，即 $S=\pi D^2/4$，D 是小面球直径，ρ 是流体的密度，v 是圆球速度的大小，C 是一个无量纲阻力系数，它与雷诺数 $\mathrm{Re}=\rho vD/\mu$ 的关系如图4.4所示，其中 μ 是流体的粘度，单位是泊(克/厘米·秒)。

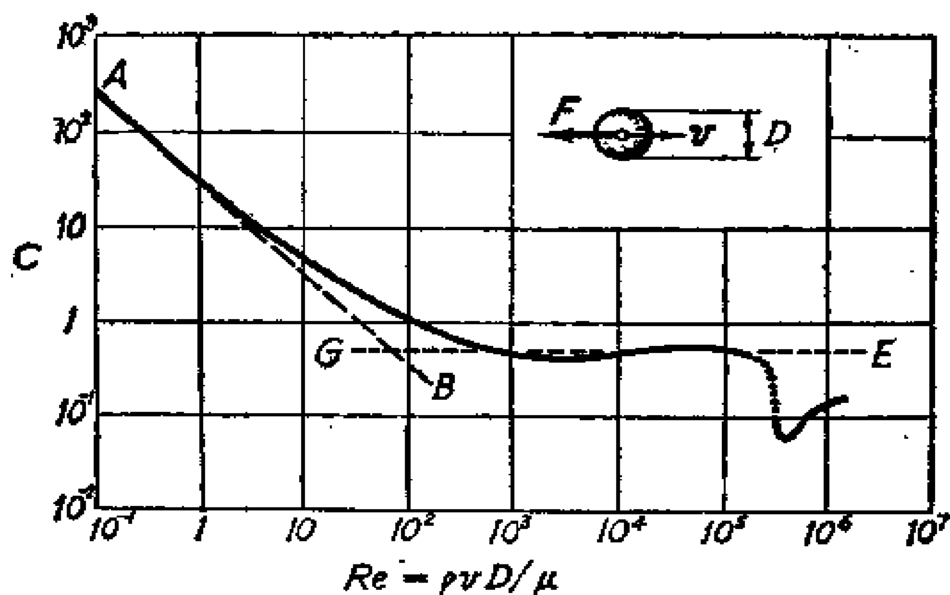


图4.4 圆球阻力系数 C 与雷诺数 Re 的关系

可见，很难用一个解析表达式来表明阻力与速度的关系。在 v 较小的时候（确切地说是雷诺数小于1时），曲线可用图中的虚直线段 AB 近似地代替，它是 $C=24/\mathrm{Re}$，因而阻力的大小为

$$F=3\pi\mu Dv=cv,$$

即阻力与速度一次方成正比，其中 $c=3\pi\mu D$ 称为阻尼系数。这是斯托克斯(Stokes)1850年给出的结果。在速度较大时（雷诺数在 10^4 到10^5 之间），我们可用图中虚直线段 GE 近似地代表这条曲线，此时阻力与速度的二次方成正比。

在普通介质中，自由落体的阻力 $\boldsymbol{R}$ 的大小可以按小雷诺数情况处理，因此可写成

$$\boldsymbol{R}=-c\dot{x}\boldsymbol{i},$$

其中负号表示阻力与速度反向。

于是，质点的运动微分方程是

$$m\ddot{x}=mg-c\dot{x}, \tag{1}$$

初条件是 $x(0)=0$，$\dot{x}(0)=0$。

令 $v_-^*=mg/c$，将式(1)写成

$$\frac{d\dot{x}}{dt}=g\left(1-\frac{\dot{x}}{v_-^*}\right).$$

分离变量 $\dot{x}$ 和 t，并求积分，得

$$\int_0^v \frac{d\dot{x}}{1-\dot{x}/v_-^*}=\int_0^t g\,dt,$$

积分后得（设 $\dot{x}<v^*$）

$$v^*\ln\left(1-\frac{\dot{x}}{v^*}\right)=-gt.$$

将 $\dot{x}$ 解出得

$$\dot{x}=v^*\left(1-e^{-gt/v^*}\right), \tag{2}$$

或写成无量纲变量形式

$$\frac{\dot{x}}{v_-^*}=1-e^{-t/\tau}, \tag{3}$$

其中 $\tau=v^*/g=m/c$。

式(3)的关系如图 4.5 所示。

从式(2)或(3)中，以及从图 4.5 中都可以看出，初始时速度为零，以后越来越大，最后当 t 趋于无穷时，$\dot{x}$ 趋于 v^*，所以 v_-^* 被称为**极限速度**。另外，在得出式(2)时我们假设 $\dot{x}<v_-^*$，这

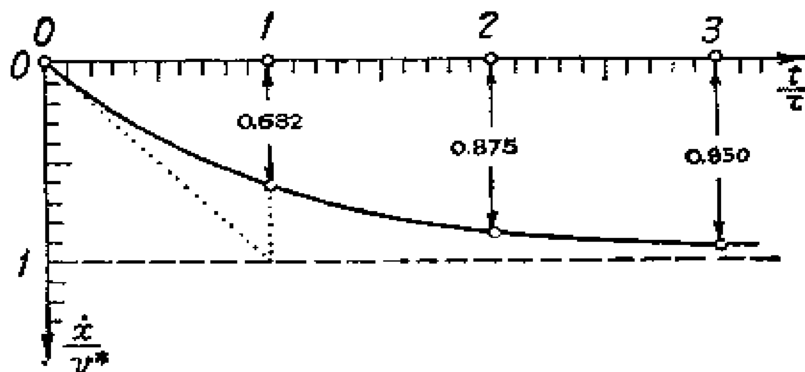


图4.5　无量纲变量表示的速度曲线

个假设是成立的，所以这个解有效。这个解说明在下落过程中，开始时重力大于阻力，因此质点是加速的，随着速度增大阻力也增大，加速度就减小了（因为重力不变）。最后阻力实际上与重力相等，质点就不再加速了，几乎以极限速度等速下降。我们很幸运有这样好的结论，否则由高空落下的经无限加速的雨点，足以将我们的脑袋击穿！值得一提的是，虽然在理论上讲，达到极限速度要"无限长"的时间，但实际情况是，当 $t/\tau=3$ 时，$\dot{x}=0.950v^*$，则在精确到百分之五的要求下，可以认为已经达到极限速度。这里的 $\tau=m/c$，称为**特征时间**。显然，在同样质量的情况下，阻尼系数 c 愈大，则特征时间 τ 就愈小，质点达到极限速度所需的时间也就愈短。当 $t=\tau$时，$\dot{x}=(1-1/e)\,v^*=0.632\,v^*$。对于同一个重球分别在水和甘油中①降落时，阻尼系数之间有关系

$$c_{甘油}:c_{水}=670:1,$$

因而重球在水中的极限速度是甘油中的 670 倍，而在水中的特征时间也是甘油中的670倍。

将 $\dot{x}$ 和 t 的关系式(2)进一步积分，求得点的运动方程

$$x=v^*t-\frac{v^{*2}}{g}(1-e^{-gt/v^*}),$$

① 假设重球密度比水和甘油大得多，因而不考虑水和甘油彼此的密度差。

或写成无量纲变量的形式

$$\frac{x}{v^*\tau}=\frac{t}{\tau}-(1-e^{-t/\tau}). \tag{4}$$

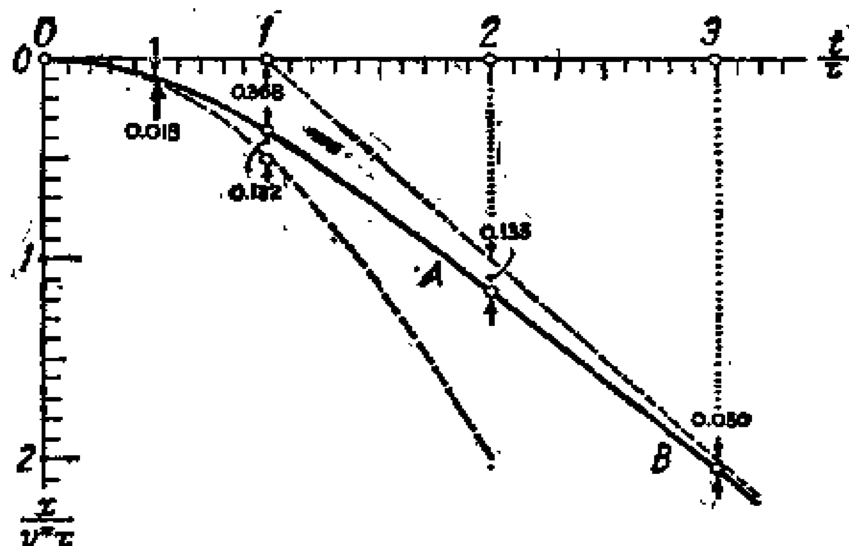


图4.6 极限状态的分析

这个关系式可通过图 4.6 中的曲线 OAB 表出。从图中可以看出，当 t 很小($t\ll\tau$)时，运动和无阻尼的自由落体（图中虚线画的抛物线）很接近。从分析表达式看，将式(4)按 t/τ 这个小量的幂级数展开，得到

$$\frac{x}{v^*\tau}=\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\tau}\right)^2+O\left(\frac{t^3}{\tau^3}\right).$$

略去高阶小量就得到（注意到 $\tau=v^*/g$）

$$x\approx gt^2/2.$$

当 $t\gg\tau$ 时，得

$$x\approx v^*(t-\tau).$$

在图中用虚直线表示，即质点几乎作等速直线运动，速度为 v^*。这和前面讨论的结果是完全吻合的。▌

通过这个例子可以看出，处理一个力学问题，必须在解题的过程中以及对它的最后结果尽量注意物理意义的分析讨论。在解

题过程中所用到的一些方法，例如无量纲化，近似处理方法，以及用图表配合分析问题等等都是解决力学问题时经常要用到的，我们还会在今后的正文或例题中反复应用。

通过这个例子，对于已知力求运动这类问题，我们归纳出解题的步骤大体为：

（1）对质点进行受力分析；

（2）选取合适的坐标系，写出力和加速度的分量表达式；

（3）列出数量形式的运动微分方程，并写出相应的初条件；

（4）进行数学运算，这时应充分而灵活地运用题意中已知的物理条件；

（5）分析讨论数学结果的力学意义，这一步的重要性我们已多次讲过，这里不再重复。

例4.4 在冰面上踢一小石子，使它获得向东的初速 $v_0=4.9$ 米/秒。设冰面的动摩擦系数[①] $\mu=0.2$，$g=9.8$ 米/秒²。求 6 秒后石子所在的位置。

解 取坐标原点 O 在石子的出发点，x 轴向东。

在水平方向石子只受一个力，即摩擦力，大小为 μmg，方向与运动方向相反，即向西。故运动微分方程为

$$m\ddot{x}=-\mu mg,$$

或写成

$$\ddot{x}=-\mu g. \tag{1}$$

初条件为

$$x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=v_0.$$

由此求得方程(1)的特解为

$$x(t)=v_0t-\frac{1}{2}\mu gt^2. \tag{2}$$

---

① 动摩擦系数是两物体有相对滑动时的摩擦系数，它的数值略小于最大静摩擦系数，但相差很小，一般就不加区分。有相对滑动时的摩擦力大小等于摩擦系数乘正压力，方向与相对运动方向相反。

将已知数据 $v_0=4.9$ 米/秒，$t=6$秒，$\mu=0.2$，$g=9.8$米/秒^2 代入得

$$x(6)=-5.9\text{米}。$$

结论是用脚向东踢石子，经过 6 秒以后，石子在原来位置的西边 5.9 米处！这一结论显然是荒谬的，问题出在哪里？

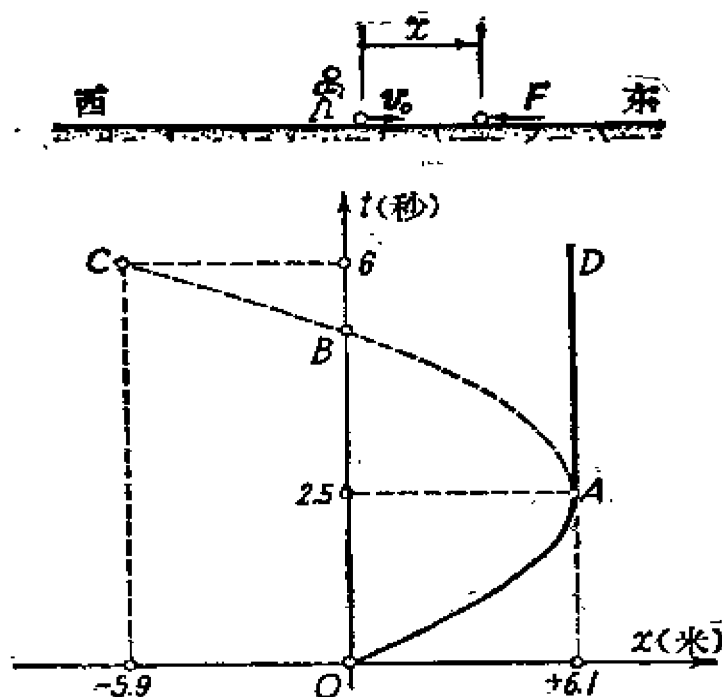


图4.7　荒谬的结果：向东踢石子，6秒钟后石子出现在西边

我们把由方程（1）得出的解（2）用图画出，并进行分析(图4.7)。式（2）的图示是曲线 $OABC$，从图中看到当 $t=2.5$ 秒时，石子达到东方 6.1 米处，这之后石子就要往回滑。从物理意义上看，石子在有摩擦的冰面上滑动，越滑越慢，最极端的情况是停下来，而不可能往回滑。因此，凭直观经验，大约曲线 OAD 是合理的，而曲线 $OABC$ 是不合理的。那么数学结果为什

么与物理意义的解释不一致呢？这就要从受力分析开始，到列微分方程、写初条件以及数学运算等等逐步检查，分析是哪一步有了错误？这件事就留给读者自己去完成。 ▎

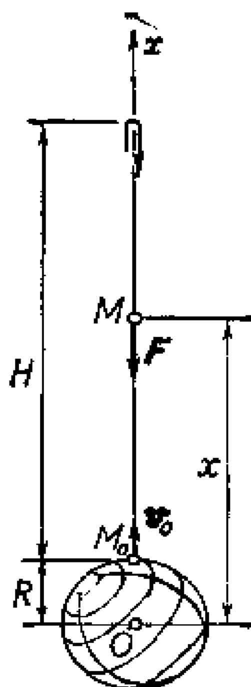


图4.8 求上抛高度 H

例4.5 以很大的初速 v_0 自地球表面竖直向上抛出一物体(图4.8)。设物体所受引力 $\boldsymbol{F}$ 之大小与到地心的距离平方成反比，地球表面处重力加速度为 g，地球半径为 R。不计空气阻力。求物体能达到的最大高度 H。

解 取地心参考系，坐标原点在地心 O，x 轴向上为正。质点受到唯一的力是引力 $\boldsymbol{F}$，它在 x 轴上的投影是

$$F_x = -k/x^2.$$

上式中的 k 是比例系数，可以这样来确定它：因为在地球表面 $x=R$ 处，$F_x = -mg$，所以有 $k = mgR^2$。于是有 $F_x = -mgR^2/x^2$。由此得运动微分方程是

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\frac{R^2}{x^2}, \qquad (1)$$

初条件为 $x(0)=R$，$\dot{x}(0)=v_0$。

为了解方程(1)，注意到关系

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{d(\dot{x}^2/2)}{dx}.$$

加速度的这种表示形式很有用处，今后还会用到。将此关系代入式(1)，分离变量后得到

$$d\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2\right) = -\frac{gR^2}{x^2}dx.$$

在求积分时，取下限相应于起始状态($x=R$，$\dot{x}=v_0$)，上限相

应于最高位置状态（$x=R+H$，$\dot{x}=0$），则有

$$\int_{v_0}^{0} d\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2\right)=\int_{R}^{R+H}\left(-\frac{gR^2}{x^2}\right)dx.$$

由此算出最大高度为

$$H=\frac{v_0^2}{2g}\left(1-\frac{v_0^2}{2gR}\right)^{-1}.$$

现在我们分析这一结果。

设 v_0 较小，即当 $v_0^2 \ll 2gR$ 时，则可将上式按幂级数展开，并略去 $(v_0^2/2gR)$ 的高阶小量，得

$$H=\frac{v_0^2}{2g}\left(1+\frac{v_0^2}{2gR}+\cdots\right)\approx\frac{v_0^2}{2g}.$$

这就是通常的上抛高度公式，也就是把重力当作不变的量（因为 $R \gg H$，所以 $x\approx R$），即恒等于 mg 的结果。当 $v_0^2/2gR$ 较大时就不能用这个近似式了。当 $v_0^2 \to 2gR$ 时，将得到 $H\to\infty$。从物理上看，如果以初速 $v_0=\sqrt{2gR}$ 向上抛出物体，其最大上升高度将变成无限大，即物体一直上升，不再落回到地球。这个 $\sqrt{2gR}$ 的具体数值（用 $g=9.8$ 米/秒^2，$R=6370$ 公里 代入）是 11.2 公里/秒，就是地球的**第二宇宙速度**，或称**逃逸速度**。

现在又出现一个问题，如果初速 $v_0>\sqrt{2gR}$，代入 H 的表达式后，H 出现了负值！这个负值代表什么意思呢？又在什么地方出了错误？请读者自己进行分析。 ▌

振动问题是动力学中的一个专门课题。对于最简单的一维振动，或称单自由度振动，我们通过以下几个例题来加以叙述。当然，把它们看成一个专门的章节也是合适的，因为讨论的方法和结果都具有普遍意义。

例4.6 质点的自由振动 自然界和工程技术中有许多振动问题，它们的动力学特征可以用质量弹簧系统这种力学模型来刻划（图4.9）。一个质量为 m 的质点（代表参与振动的物体）与一个

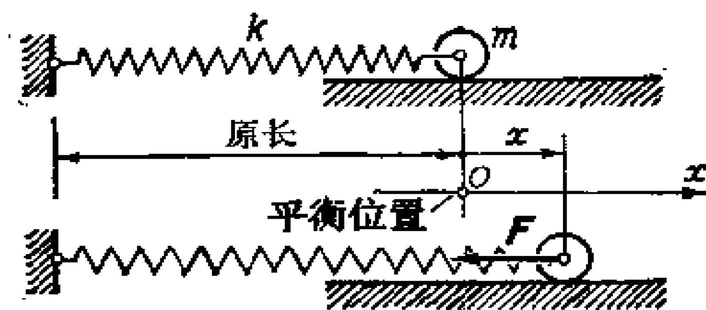


图4.9 质量弹簧系统

弹簧（代表各种弹性元件或产生恢复力的因素）相连，弹簧的刚度系数（或称弹性系数）是 k，即在弹性范围内弹簧受到的拉力（或压力）的大小与它的伸长量（或缩短量，伸长量和缩短量都应该从弹簧的原长算起）成正比，写成

$$F=k|\Delta l|=k|l-l_0|,$$

其中 l_0 为弹簧的原长。在运动过程中，质点以一定的力作用于弹簧，使它伸长或缩短，而弹簧以反作用力作用在质点上，这个力总是力图将质点拉回到与弹簧原长所对应的位置，所以叫做**恢复力**。质点除了恢复力以外，就沒有其他的水平力作用了（假定质点放在光滑的水平面上）。

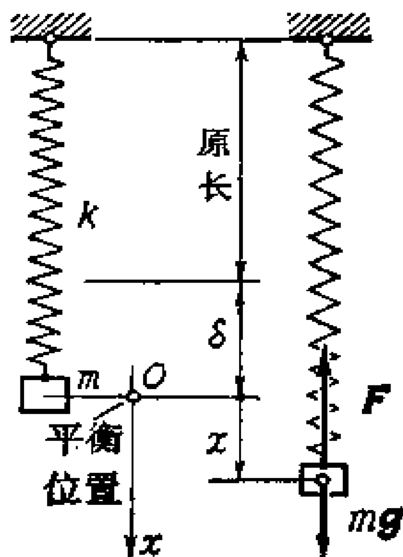


图4.10 竖挂的质量弹簧系统

取质点的平衡位置（在目前这种情况下，就是使弹簧保持原长的位置）为坐标原点，x 轴向右为正。因此，运动微分方程为

$$m\ddot{x}=-kx,$$

或写成

$$m\ddot{x}+kx=0. \qquad (4.4)$$

在解微分方程（4.4）之前，我们假定质量弹簧系统是竖直挂着的（图4.10），分析此时的运动微分方程与

(4.4)有什么差别。质点在平衡位置时，弹簧由于重力对质点的作用，已经被拉长了一段距离 δ，叫做静伸长。由平衡条件可知

$$\delta = mg/k。$$

如果把坐标原点也取在平衡位置（注意此时弹簧并不是原长），x 轴竖直向下为正，那么当质点的位移是 x 时，弹簧的伸长量应该是 $\delta + x$，因而弹簧对质点的作用力是

$$\boldsymbol{F} = -k(\delta + x)\boldsymbol{i}。$$

于是质点的运动微分方程是

$$m\ddot{x} = mg - k(\delta + x)。$$

因为 $\delta = mg/k$，所以 mg 和 $-k\delta$ 两项刚好消去。最后，运动微分方程仍然与(4.4)的形式一样。但要注意在两种情况中虽然坐标原点都取在平衡位置，然而质点在平衡位置时弹簧的状态不一样。

其实，运动微分方程(4.4)具有广泛的代表性。只要是具有恢复力的无阻尼的单自由度线性系统，无论是放在弹性基础上的电动机的振动，还是船舶在平衡位置附近的微小摆动，或者是二氧化碳分子中三个原子在平衡位置附近的振动，经过一定的折算以后，都可以用质量弹簧系统这个模型来代表，其运动微分方程都是(4.4)这种形式，只是其中变量 x 的物理意义可能改变了，m 和 k 也成了一种“折合”的质量和“折合”的刚度系数了。

现在我们求解方程(4.4)。设质点在初始时刻位移是 $x(0) = x_0$，速度 $\dot{x}(0) = v_0$，根据二阶常系数线性常微分方程的理论，方程(4.4)的特征方程是

$$m\lambda^2 + k = 0。$$

所以特征根 $\lambda = \pm \omega i$，其中 $i = \sqrt{-1}$，而

$$\omega = \sqrt{k/m}。 \tag{4.5}$$

因而方程(4.4)的通解是

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t。$$

利用初条件可求得积分常数 $C_1 = x_0$，$C_2 = v_0/\omega$。因而方程

(4.4)的特解是

$$x=x_0\cos\omega t+\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t。$$

也可以写成

$$x=A\sin(\omega t+\varphi),\tag{4.6}$$

其中 $A=\sqrt{x_0^2+(v_0/\omega)^2}$ 叫做**振幅**，$\varphi=\mathrm{arc\,tg}(\omega x_0/v_0)$ 叫做**初相角**（**或初位相**）。式(4.6)给出的 x-t 关系如图4.11所示。

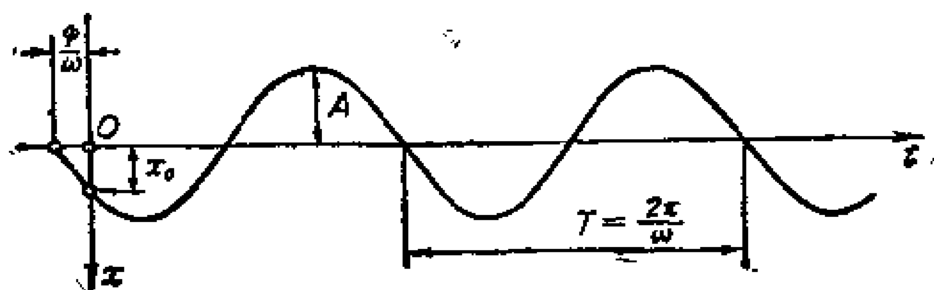


图4.11 简谐振动

质点的位置是时间 t 的周期函数，其周期为

$$T=2\pi/\omega,$$

其频率为

$$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}.$$

频率的单位是赫芝，即次/秒。如日用交流电的频率是 50 赫芝，它与发电机的转速每分钟3000转是相应的。在理论讨论中采用圆频率 ω 比频率 f 方便，它是频率的2π 倍，单位是弧度/秒或简写成1/秒。以后，我们一般都用圆频率，在不致引起误解的时候也简称频率。

(4.5)和(4.6)两式说明了质量弹簧系统的自由振动的基本特性，即系统自由振动的振幅由初条件确定，而振动的频率则与初条件无关。频率只依赖于系统的刚性和惯性，是系统的固有特

性．所以ω又称为**固有频率**．由式(4.5)看出，刚性越大，固有频率越高，惯性越大则固有频率越低．▎

＊＊＊　如将图4.9或图4.10中的质量增大到原来的两倍，振动的频率、周期和振幅是增大还是减小？如质量不变而将弹簧长度减半，频率、周期和振幅又将怎样变化？＊＊＊

例4.7　有阻尼的振动　质量与弹簧的情况与上例相同，设阻力与速度成比例，即阻力$\boldsymbol{R}=-c\dot{x}\boldsymbol{i}$，那么运动微分方程将由(4.4)改变成

$$m\ddot{x}=-kx-c\dot{x}.$$

或写成

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+\omega^2x=0, \tag{4.7}$$

其中常量$n=c/2m$．

微分方程(4.7)的特征方程是

$$\lambda^2+2n\lambda+\omega^2=0.$$

它的特征根可能有以下三种情况：

(1)　当$n<\omega$时，

$$\lambda_1=-n+i\sqrt{\omega^2-n^2},\quad \lambda_2=-n-i\sqrt{\omega^2-n^2};$$

(2)　当$n>\omega$时，

$$\lambda_1=-n+\sqrt{n^2-\omega^2},\quad \lambda_2=-n-\sqrt{n^2-\omega^2};$$

(3)　当$n=\omega$时，$\lambda_1=\lambda_2=-n$．

我们不详细计算在已知初条件下的特解，而只是一般地讨论上述三种情况的运动各有什么特征．

第一种情况是在阻尼系数比较小时发生的．解的一般形式是

$$x=e^{-nt}(C_1\cos\omega_0 t+C_2\sin\omega_0 t).$$

或写成

$$x=Ae^{-nt}\sin(\omega_0 t+\varphi),$$

其中$\omega_0=\sqrt{\omega^2-n^2}$，$C_1,C_2$或$A,\varphi$都是由初条件确定的常量。这表明振动是在逐渐地衰减(图4.12)。

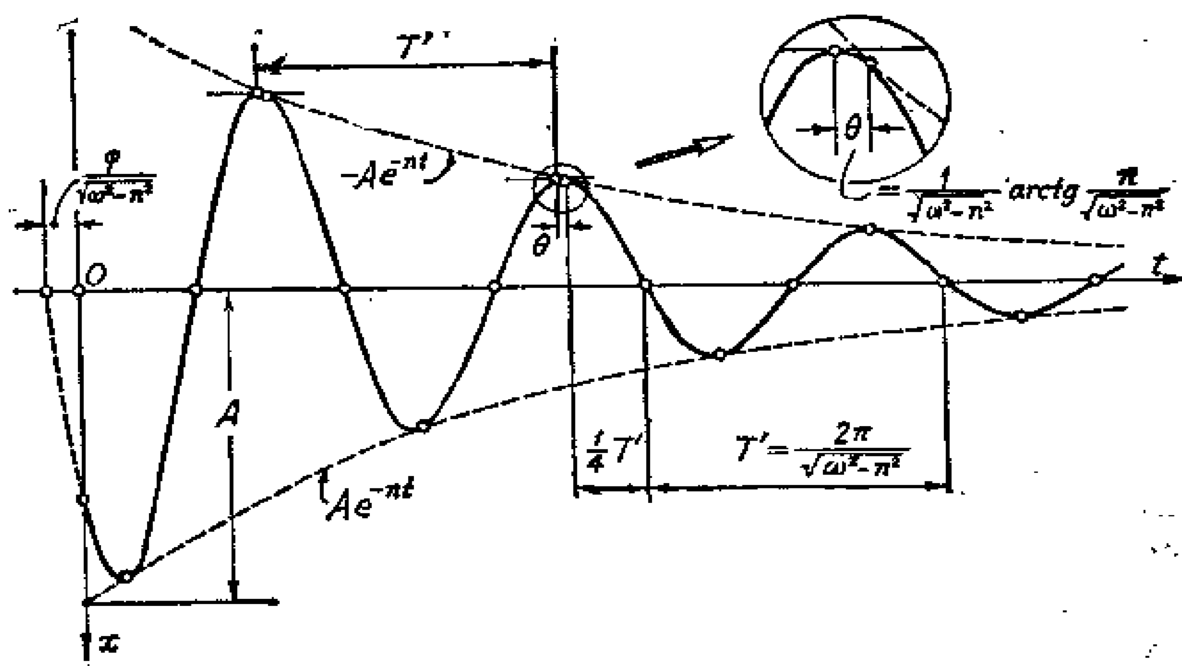


图4.12　小阻尼情形的衰减振动

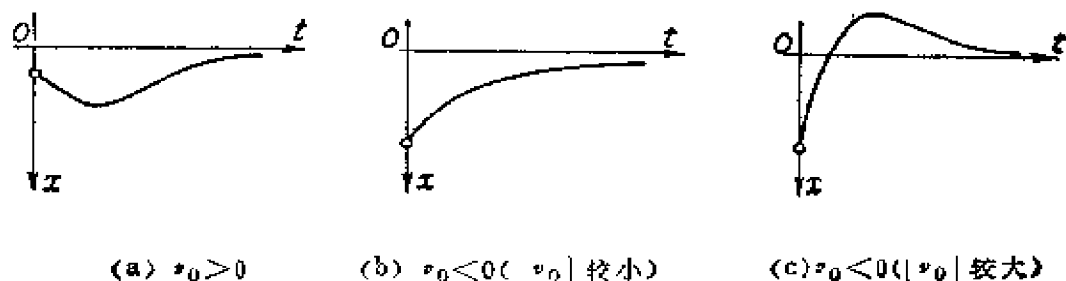
在目前这种情况下，运动并不周期性地重复，但是质点经过平衡位置的时间间隔是相同的。我们把经过平衡位置的周期T'叫做“准周期”，$T'=2\pi/\omega_0$，比无阻尼情况下的周期$T=2\pi/\omega$要大一些($\omega_0<\omega$)。

第二种情况是在阻尼系数比较大时发生的，解的一般形式为

$$x=e^{-nt}\left(C_1e^{\sqrt{n^2-\omega^2}\,t}+C_2e^{-\sqrt{n^2-\omega^2}\,t}\right),$$

其中常量C_1及C_2由初条件确定。根据不同的初速v_0，x-t曲线将出现如图4.13所示的三种情况。

这时，x随着t的增大趋向于零，但不再有振动的性质，因



(a) $v_0>0$　　(b) $v_0<0$（$|v_0|$较小）　　(c) $v_0<0$（$|v_0|$较大）

图4.13　大阻尼情况下的衰减振动

此也就不存在振幅和周期。

至于第三种情形，它是一种非常特殊的临界情形。解的一般形式是

$$x=e^{-nt}(C_1+C_2t),$$

其运动特征与第二种情形相同。

我们可以从物理上作这样的理解，当无阻尼时，质点以周期 T 作等幅振动。有了阻尼以后，由于阻力的作用使周期（实际上是“准周期”）增大，使振幅衰减。随着阻尼的增大，周期也增大。当达到$n=\omega$以后，运动特征发生了质的变化，即振动特征消失了（可以认为 $n=\omega$ 时周期为∞）。▍

例4.8 质点的受迫振动　设质点除了恢复力$-kx\boldsymbol{i}$ 和阻力$-c\dot{x}\boldsymbol{i}$ 以外，还受到一个周期性的外力 $H\sin\Omega t\boldsymbol{i}$ 的作用，则其运动微分方程为

$$m\ddot{x}=-kx-c\dot{x}+H\sin\Omega t. \tag{4.8}$$

引起这种周期性外力的原因通常有两种。一种是确实有周期性的干扰力（或称驱动力）存在，比如机器中有些转动部件重心不在轴上，因而引起了一个周期性变化的力 $H\sin\Omega t$，其中 Ω就是转动部件的转动角速度；第二种是由于振动系统的支承点本身作振动所造成的。现在分析这后一种情况。设图4.14中弹簧上端在作垂直振动，其位移是 t 的已知函数，$x'=a\sin\Omega t$，a 是它的

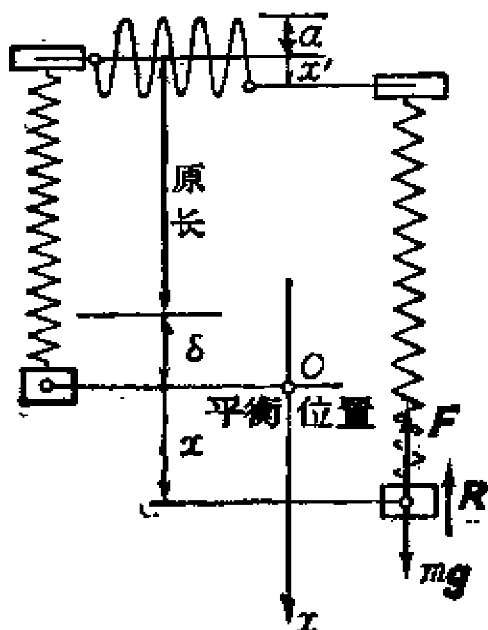


图4.14 质点受迫振动

振幅，Ω 是频率。当质点离开平衡位置的距离为 x 时，弹簧的伸长量是 $\delta+x-x'$，因而在垂直方向（取为 x 轴，向下为正）的弹簧力是

$$F_x=-k(\delta+x-x')。$$

阻力仍是 $R_x=-c\dot{x}$。于是运动微分方程是

$$m\ddot{x}=mg-k(\delta+x-x')-c\dot{x},$$

其中 $-k\delta$ 与 mg 刚好消去，最后可得

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=ka\sin\Omega t。$$

可见这种弹簧上端振动的情况和加上一个周期性外力 $H\sin\Omega t$（此时 $H=ka$）的作用是完全一样的。

根据常微分方程的理论，方程(4.8)的通解将由相应的齐次方程 $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$ 的通解和非齐次方程的一个特解 $x^*(t)=A\sin(\Omega t+\theta)$ 所组成。我们只考虑齐次方程的特征根是一对共轭复根 $-n\pm i\omega_0$（$\omega_0=\sqrt{\omega^2-n^2}$）的情形（其余两种情况可相仿处理）。于是方程(4.8)的通解可写成

$$x=e^{-nt}(C_1\cos\omega_0 t+C_2\sin\omega_0 t)+x^*(t)。$$

因为 $n>0$，当 t 增大时，上式右边第一部分将减小，当 t 趋于无穷大时，它就趋于零。在实际问题中只要在一定时间间隔以后这一部分就可以被忽略了，这时只留下周期性特解 $x^*(t)$，称为**定常振动**。在研究受迫振动的问题中，人们的兴趣都集中在这一部分上。

因为特解 $x^*(t)=A\sin(\Omega t+\theta)$ 满足方程(4.8)，将它代入就

可以决定 A 和 θ。具体的运算办法是，代入后将 $H\sin\Omega t$ 改写成

$$H\sin(\Omega t+\theta-\theta)=(H\cos\theta)\sin(\Omega t+\theta)-(H\sin\theta)\cos(\Omega t+\theta),$$

然后分别令等式左右 $\sin(\Omega t+\theta)$ 和 $\cos(\Omega t+\theta)$ 的系数相等。最后可得

$$A=\frac{H/k}{\sqrt{4\left(\frac{n}{\omega}\right)^2\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2+\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2}},$$

$$\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{2\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)\left(\frac{n}{\omega}\right)}{1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}},$$

其中 $n/\omega, \Omega/\omega$ 都是无量纲的量。

以上结果说明，在受迫振动中，质点的定常状态是不衰减的振动，其频率与周期性外力的频率相同，而其振幅与初条件无关，只依赖于系统本身的性质（反映在 m，k 和 c 三个参数中），以及周期性外力的振幅 H 和驱动频率 Ω。

在实际问题中，最感兴趣的是定常振动的振幅值 A。在有的问题中希望 A 不超过某个许可值，以避免发生很大的噪音甚至造成破坏；在另一些问题中则希望 A 要大，即希望振动能被“激发”起来，以备应用。无量纲比值 A/a（在振幅公式中 $a=H/k$）代表放大倍数，即弹簧上端的振幅被放大了多少倍而成为质点的振幅。这个放大倍数与 $n/\omega, \Omega/\omega$ 的关系图叫做**响应曲线**（图4.15）。

从响应曲线可以看出受迫振动的一些重要性质。如驱动频 Ω 比固有频率 ω 低得多，即 $\Omega/\omega\ll1$，则 $A/a\approx1$。这就是说，在低频驱动力作用下，质点的振幅（简称为输出振幅）与弹簧端点的振幅（简称为输入振幅）差不多相同。如驱动频率 Ω 比固有频率 ω 高得多，即 $\Omega/\omega\gg1$，则 $A/a\approx0$。这就是说，在高频驱动力作用下，输出振幅几乎等于零。当 Ω 与 ω 很接近时，即 $\Omega/\omega\approx1$，则输出振幅有较大的数值。不难通过用求极值的方法求出取极大

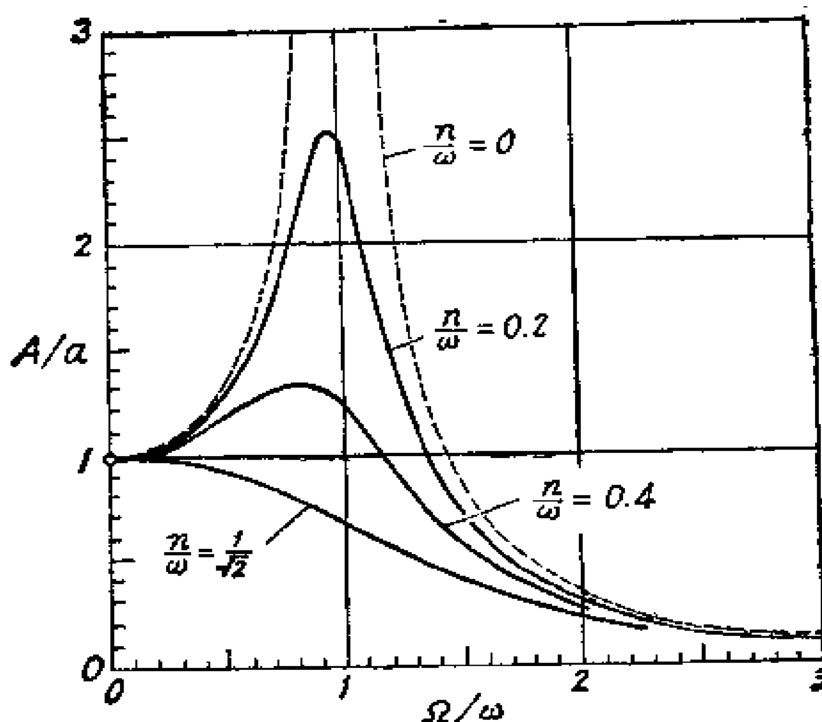


图4.15 响应曲线

值的条件。

另外，从响应曲线还可以看到，阻尼的大小对放大倍数有很大的影响。特别在阻尼小($n/\omega\approx0$)而驱动频率 Ω 接近固有频率 ω 时，受迫振动的振幅较大，系统将发生强烈的振动。极端的情况是 $n=0$（无阻尼），且 $\Omega\approx\omega$ 时，A 将成为无限大，即沒有有限振幅的定常振动。这种情况叫做共振。实际上系统中阻尼总是存在的，所以 $n\approx0$，$\Omega=\omega$ 的情况也就叫做共振了。从物理上看，为什么会出现共振现象？Ω 与 ω 相等或接近，表示外驱动力的变化周期与质点的振动周期合上了拍，能量不断输入到振动系统里去，振幅越来越大。从数学上看振幅能达到∞，但在物理上看是不可能的，只能是能量不断输入，振幅愈来愈大，直到质量弹簧系统被破坏为止。

在实际问题中，一般地要避免出现共振，这可以通过增大阻尼或使 Ω 与 ω 两者远离的办法来实现。在某些情况下，也可能需要利用共振，那么就要去创造 $n\approx0$，$\Omega\approx\omega$ 的共振条件。 ▌

例4.9 单摆 质量为 m 的质点 M 挂在长为 l 的绳的一端，并在竖直平面内来回摆动(图4.16)。质点的轨迹是一圆弧，这个运动也是一维的。

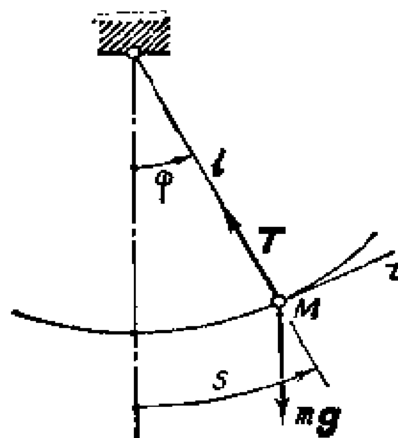


图4.16 单摆

我们利用本性表示法求解（利用极坐标也很方便)。这时切向加速度是 d^2s/dt^2，于是运动微分方程是

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=\sum F_\tau,$$

其中 F_τ 是力在切线方向的分量，s 是由最低点算起的弧长，向右为正。作用在质点上的力有绳子的张力和重力。绳子的张力沿绳的方向，所以它的切向投影为零。于是运动微分方程为

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=-mg\sin\varphi。$$

因为 s 与 φ 的关系为 $s=l\varphi$，所以方程又可写成

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0。$$

设摆动的幅度很小，即 φ 是小量，那么 $\sin\varphi$ 可以按幂级数展开，略去高阶小量，得 $\sin\varphi\approx\varphi$。最后得出运动微分方程为

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\varphi=0。$$

虽然在这个例子中并不存在弹簧，但是重力的切向分量也具有恢复力的性质(力图将质点拉回到平衡位置去)，所以得出的方程与(4.4)完全相似，只是现在的变量 φ 是一个角度，不再是位移。以下的处理方法就与质量弹簧系统完全类似了。对照式(4.5)

立刻可知微幅摆动的（圆）频率是$\omega=\sqrt{g/l}$。

当φ很小时，将$\sin\varphi$用φ来代替，从而使运动微分方程近似化为线性微分方程，这种方法叫做**线性化方法**，是力学中经常要用到的一种近似方法。经线性化以后的近似模型（一种理论上的抽象）叫做线性化力学系统，或简称线性系统。它与真实情况当然是有差别的，但在平衡位置附近（即$\varphi=0$附近）相差不大。线性化以后的动力学问题从数学方面看就要简单得多了。▌

4-4 二维和三维运动

质点的运动如果需要两个独立的变量来描述，则称为**二维运动**。质点在平面上的自由运动当然是二维运动，被限制在球面上的质点的运动也是二维运动。质点在空间的自由运动需要三个独立的变量来描述，它是三维运动。自由抛射一个质点时，事先没有限制质点一定在哪一个平面内运动，对它的描述还是需要三个独立的变量，所以运动是三维的。在初位置和初速度给定以后，如例4.2，运动是在一个确定平面上进行的，在此基础上我们才可以把它化成为二维运动来处理。

上一节中关于解动力学问题的一般步骤，对于质点的二维或三维运动来说也是适用的，只是运动微分方程及初条件都要复杂一些。我们以质点在平面上的运动为例，来说明一般的解法。如果选用直角坐标系，则运动微分方程可以写成

$$m\ddot{x}=F_x,\qquad m\ddot{y}=F_y.$$

F_x和F_y是作用在质点上的合力的分量，在最一般的情况下，它们可以是时间、位置及速度的函数。假设有关系

$$F_x=F_x(t,x,y,\dot{x},\dot{y}),$$
$$F_y=F_y(t,x,y,\dot{x},\dot{y}).$$

于是质点的运动微分方程组就是

$$m\ddot{x}=F_x(t,x,y,\dot{x},\dot{y}),$$

$$m\ddot{y}=F_y(t,x,y,\dot{x},\dot{y}).$$

这个方程组的未知函数是 $x(t)$ 和 $y(t)$，通解将含有四个积分常数，需要由四个初条件，即 $t=0$ 时 $x,y,\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 的值来确定。

对于不同的问题，可以选取不同的坐标系，至于如何选择合适的坐标系，这要依靠研究必要的例题和解大量的习题，熟能生巧，才能取得经验。

例4.10 质量为 m 的质点，受到固定点的引力 $\boldsymbol{F}$ 的作用，力的大小与质点到固定点的距离成正比，比例系数为 k。已知初位置 $\boldsymbol{r}_0$，初速度 $\boldsymbol{v}_0$，求质点的运动。

解 取 $\boldsymbol{r}_0$ 和 $\boldsymbol{v}_0$ 所组成的平面为 Oxy 平面，原点取在固定点 O，y 轴沿着 $\boldsymbol{v}_0$ 的方向，x 轴与它垂直(图4.17)。于是运动微分方程为

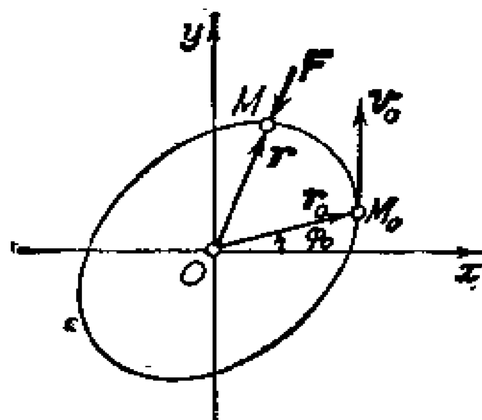


图4.17 椭圆轨道

$$m\ddot{x}=-kx,$$

$$m\ddot{y}=-ky.$$

相应的初条件为

$$x(0)=r_0\cos\varphi_0,$$

$$y(0)=r_0\sin\varphi_0;$$

$$\dot{x}(0)=0, \qquad \dot{y}(0)=v_0,$$

其中 φ_0 是 $\boldsymbol{r}_0$ 与 x 轴的夹角，也就是 $\boldsymbol{r}_0$ 与 $\boldsymbol{v}_0$ 之间夹角的余角，它是已知的。

这个方程组中的两个方程都很特别，它们分别只与一个未知变量有关，而且与上节中质点自由振动方程(4.4)相似。利用例4.6的结果，立刻得出

$$x = r_0 \cos\varphi_0 \cos\omega t,$$

$$y = r_0 \sin\varphi_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t;$$

其中 $\omega^2 = k/m$。不难断定质点的运动轨迹是一个椭圆。

如果初条件给得很特别，使 r_0 与 v_0 方向一致，即 $\varphi_0 = \pi/2$，则质点的运动方程为

$$x = 0,$$

$$y = r_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t.$$

这代表沿着 y 轴的直线振动。椭圆轨迹退化成一条直线。

请读者找出使质点作圆周运动的初条件。

如果我们一开始在轨迹平面内选用极坐标，也以可求解。于是运动微分方程是

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = -k\rho,$$

$$m(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) = 0.$$

初条件是

$$\rho(0) = r_0, \qquad \varphi(0) = \varphi_0;$$

$$\dot{\rho}(0) = v_0 \sin\varphi_0, \qquad \dot{\varphi}(0) = \frac{v_0}{r_0}\cos\varphi_0.$$

将第二个微分方程改写成

$$m\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\varphi}{dt}\right) = 0.$$

积分一次，并应用初条件确定积分常数，得

$$\rho^2\dot{\varphi} = r_0 v_0 \cos\varphi_0.$$

代入第一个方程，得到 ρ 所满足的微分方程

$$m\left[\ddot{\rho} - \frac{1}{\rho^3}(r_0 v_0 \cos\varphi_0)^2\right] = -k\rho.$$

从中再解出 ρ 与 t 的关系，同样可以得到轨迹方程是椭圆的结果。显然，在这里用极坐标比用直角坐标要复杂得多。▌

例4.11 光滑桌面上有一质量为 m 的小球 P，用不可伸长的绳子与另一小球 Q 相连，Q 的质量是 km。绳子穿过桌面上光滑的小孔 O，绳子 OQ 部分是自由悬挂着的(图4.18)。初始时，$OP=a$，P 点的速度大小为 $\sqrt{8ga}$，方向垂直 OP。证明在 $k<8$ 的条件下 Q 将上升。又问 k 为多少时，P 离孔最大的距离可以达到 $2a$？

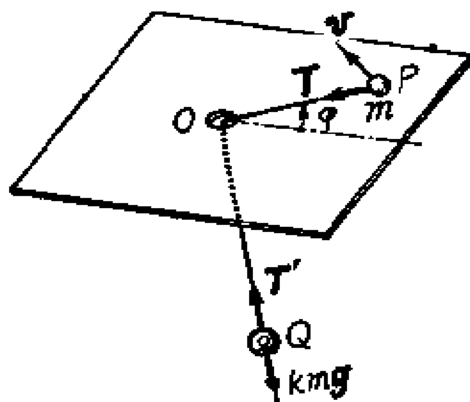


图4.18 什么条件下 Q 会向上动？

解 这里有两个质点在运动，我们对两个质点分别处理。对 P 我们采用极坐标 (ρ,φ)，φ 自某一固定方向量起。设 T 是绳子的张力，则 P 点的运动微分方程为

$$m(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2)=-T, \qquad (1)$$

$$m\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi})=0. \qquad (2)$$

对 Q 取直角坐标，z 轴向下为正，它的运动微分方程是

$$km\ddot{z}=kmg-T.$$

由于绳子不可伸长，所以 $\rho+z=$ 常量，且对 t 求两次导数，得 $\ddot{\rho}+\ddot{z}=0$。代入上式得

$$km\ddot{\rho}=T-kmg. \qquad (3)$$

由式(2)积分得 $\rho^2\dot{\varphi}=$ 常量，再利用初条件 $\rho=a$ 时，有 $\rho\dot{\varphi}=\sqrt{8ga}$，由此定出常量为 $\sqrt{8ga^3}$。于是有

$$\rho^2\dot{\varphi}=\sqrt{8ga^3}.$$

代入(1)式得

$$m\ddot{\rho} = -T + m\frac{1}{\rho^3}\cdot 8ga^3.$$

将上式与(3)相加，消去未知量 T，得到

$$(1+k)\ddot{\rho} = \frac{8ga^3}{\rho^3} - kg. \quad (4)$$

这是 ρ 所满足的微分方程。在起始时刻 $t=0$ 时，$\rho=a$，所以有

$$\ddot{\rho}\Big|_{t=0} = (8-k)g/(1+k).$$

因此当 $k<8$ 时，$\ddot{\rho}\big|_{t=0}>0$，即 OP 将开始增长，或说 Q 将开始上升。

为要回答第二个问题，需求出径向速度的关系式。利用关系式

$$\ddot{\rho} = \frac{\dot{\rho}d\dot{\rho}}{d\rho} = \frac{1}{2}\frac{d(\dot{\rho}^2)}{d\rho},$$

代入(4)，求积分，并用初条件 $\rho=a$ 时 $\dot{\rho}=0$(因为初速度与 OP 垂直)，最后可得

$$\frac{1}{2}(1+k)\dot{\rho}^2 = (4+k)ga - kg\rho - 4a^3g/\rho^2.$$

如果 $2a$ 是 P 离孔 O 的最大距离，则当 $\rho=2a$ 时应有 $\dot{\rho}=0$。将此条件代入得

$$0 = (4+k)ga - 2kga - ga.$$

由此解得 $k=3$。

在这个例题中，如果采用直角坐标系，计算就要麻烦得多。▌

例4.12 设抛射体初速为 v_0，它的方向与水平线成夹角 α (图4.19)；空气阻力与速度平方成正比，比例系数为 mk(比例系数只要写一个量就可以，这种写法完全是为了以后的计算式简化)。求抛射体的轨迹。

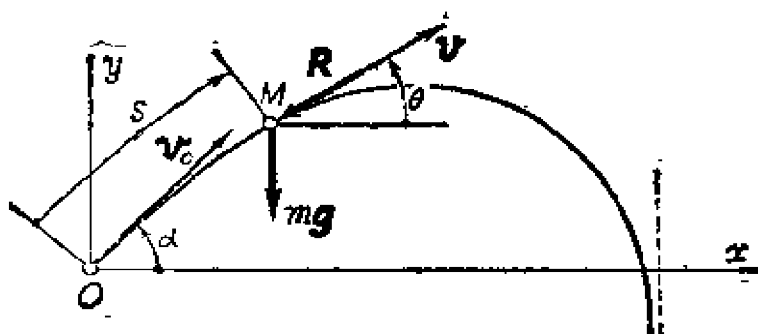


图4.19 阻尼介质中的抛射体

解 在本题中，采用本性方程比较简便。

设任何时刻速度的大小为 v，与水平线夹角为 θ（正号代表仰角，负号代表俯角），它们都是 t 的未知函数。

切线方向的方程 $ma_\tau=F_\tau$ 可写成

$$mv\frac{dv}{ds}=-mg\sin\theta-mkv^2, \tag{1}$$

其中 s 是弧长。法线方向的方程 $ma_n=F_n$ 可写成

$$mv^2\left(-\frac{d\theta}{ds}\right)=mg\cos\theta, \tag{2}$$

式中括号内取负号是由于本题中当 s 增大时，θ 是减小的。

将(1)除以(2)，得

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{d\theta}=\mathrm{tg}\,\theta+\frac{kv^2}{g\cos\theta}. \tag{3}$$

这是一个只涉及 θ 和 v 的微分方程。按题意初条件是：当 $v=v_0$ 时；$\theta=\alpha$。由此可求出 v 与 θ 的关系。

将式(3)改写成

$$\cos\theta\frac{dv}{d\theta}-v\sin\theta=\frac{kv^3}{g},$$

或

$$\frac{d}{d\theta}(v\cos\theta)=\frac{k(v\cos\theta)^3}{g\cos^3\theta}.$$

从图 4.19 中可看出，$v\cos\theta$ 就是质点的速度在 x 轴上的投影 v_x，

即 $v_x = v\cos\theta$。以 v_x 为变量，方程为

$$\frac{dv_x}{d\theta}=\frac{kv_x^3}{g\cos^3\theta}.$$

积分并利用初条件，得

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{v^2\cos^2\theta}-\frac{1}{v_0^2\cos^2\alpha}\right]$$

$$=\frac{k}{2g}\left[\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}-\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}+\ln\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}\right]. \qquad (4)$$

虽然这个表达式很繁，但可以由此解出 v 与 θ 的函数关系，假设用 $v=\psi(\theta)$ 来代表。

由式(2)得

$$\frac{d\theta}{ds}=-\frac{g\cos\theta}{v^2}.$$

因为

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{1}{v}\frac{d\theta}{dt}.$$

代回上式得

$$\frac{d\theta}{dt}=-\frac{g\cos\theta}{\psi(\theta)},$$

或写成

$$-\frac{\psi(\theta)}{g\cos\theta}d\theta=dt. \qquad (5)$$

因为 $\psi(\theta)$ 是由式(4)解出的已知函数，因此对式(5)积分就可以求出 θ 与 t 的关系。

此外，利用式(5)，有

$$dx=v_x dt=v\cos\theta\, dt=-\frac{1}{g}\psi^2(\theta)\,d\theta$$

$$dy=v_y dt=v\sin\theta\, dt=-\frac{1}{g}\psi^2(\theta)\operatorname{tg}\theta d\theta.$$

由此积分就可以求出 $x(\theta)$ 和 $y(\theta)$；

$$x = -\frac{1}{g}\int_{\alpha}^{\theta} \psi^2(\theta)\,d\theta,$$

$$y = -\frac{1}{g}\int_{\alpha}^{\theta} \psi^2(\theta)\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta.$$

再将由式(5)求得的 $\theta=\theta(t)$ 代入，最后就可以得出抛射体的运动方程 $x(t)$ 和 $y(t)$。

因为计算非常繁杂，所以我们在此只作方法上的说明。在具体问题中，通常可以用数值方法求积分。

一般地说，如果阻力与速度的关系是由函数 $f(v)$ 给出的，那么式(3)将成为

$$\frac{dv}{d\theta} = v\,\mathrm{tg}\theta + \frac{vf(v)}{mg\cos\theta}. \qquad (6)$$

只要式(6)可以积分，上面所说的方法就是普遍适用的。在历史上，下述几种特殊情况都已解决：$f(v)=av+bv^2$（牛顿，欧拉）；$f(v)=cv^n$（N．柏努利）；$f(v)=a+bv^n$（达朗培尔）。$f(v)=cv^n$ 情况的解决，当然包含了本例题($n=2$)，也包含了 $n=1$，即 $f(v)=cv$ 的情况在内。但是阻力与速度一次方成比例的情形，选用直角坐标系较为方便(见习题4.32)。 ▌

例4.13 带电粒子在均匀磁场中的运动 设粒子的质量为 m，电荷为 q，它在均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中运动($\boldsymbol{B}$ 是常向量)，它在任意时刻的速度为 $\boldsymbol{v}(t)$。根据电磁学可知，粒子受到的力是 $\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$。在不计重力的情况下，粒子的运动微分方程是

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}.$$

取直角坐标系，z 轴沿着 $\boldsymbol{B}$ 的相反方向。因此 $\boldsymbol{B}$ 的分量是 $(0,0,-B)$。x 轴这样取定，使得初速在 x 轴上的投影为零。于是运动微分方程可以写成

$$\ddot{x} = -\omega\dot{y}, \quad \ddot{y} = \omega\dot{x}, \quad \ddot{z} = 0,$$

其中常量 $\omega = qB/m$。

初条件为：$t=0$时，

$$x=x_0, y=y_0, z=z_0, \quad \dot{x}=0, \dot{y}=u, \dot{z}=w.$$

在上面的微分方程中将$\dot{x}$和$\dot{y}$看成新的变量，由前两个方程可分别得到关于$\dot{x}$和$\dot{y}$的一阶微分方程，再根据初条件即可解得

$$\dot{x}=-u\sin\omega t, \quad \dot{y}=u\cos\omega t, \quad \dot{z}=w.$$

再积分一次可得粒子的运动方程为

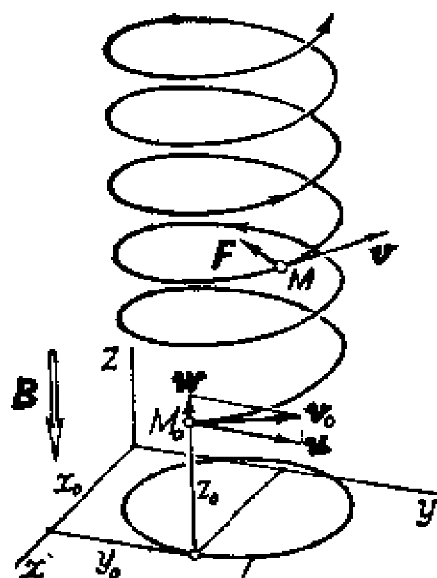
$$x=x_0-\frac{u}{\omega}(1-\cos\omega t),$$

$$y=y_0+\frac{u}{\omega}\sin\omega t,$$

$$z=z_0+wt.$$

上述解也可根据微分方程组理论直接由原来的微分方程解得。可见粒子的运动轨迹是一螺旋线(图4.20)，其速度大小

$$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}=\sqrt{u^2+w^2}=v_0\ (\text{常量}).$$



圆半径 $=u/\omega$

图4.20　带电粒子在均匀磁场中的运动

粒子的运动在x-y平面上的投影是等速圆周运动，ω就是圆周运动的角速度。在z轴方向，质点的速度分量是不变的。如果一开始初速在z轴方向没有分量，那么粒子将作真正的等速圆周运动。如果一开始初速v_0与磁场强度B平行，那么粒子在z方向作等速直线运动。▌

4-5　初积分和守恒定理

以上两节采用直接求解运动微分方程的方法来研究动力学问题，这是一种最基本的方法。但是对于各种具体问题，解出微分

方程有许多困难，而且实际上有许多问题并不需要把微分方程的解完全求出，所以产生了一些研究动力学问题的其他方法。本节和下一节将讨论其中常用的两种方法。

设质点的运动微分方程为①

$$\begin{cases} m\ddot{x}=F_x(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}), \\ m\ddot{y}=F_y(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}), \\ m\ddot{z}=F_z(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}). \end{cases} \tag{4.9}$$

它的解是

$$\begin{cases} x=x(t,c_1,\cdots,c_6), \\ y=y(t,c_1,\cdots,c_6), \\ z=z(t,c_1,\cdots,c_6). \end{cases} \tag{4.10}$$

将(4.10)对 t 求一次导数得

$$\begin{cases} \dot{x}=\dot{x}(t,c_1,\cdots,c_6), \\ \dot{y}=\dot{y}(t,c_1,\cdots,c_6), \\ \dot{z}=\dot{z}(t,c_1,\cdots,c_6), \end{cases} \tag{4.11}$$

其中 $c_1,\cdots,c_6$ 是积分常量，它们由初条件确定。设给定 $t=t_0$ 时的位置坐标(x_0,y_0,z_0)和速度分量$(\dot{x}_0,\dot{y}_0,\dot{z}_0)$。将它们代入(4.10)和(4.11)得到

$$\begin{cases} x_0=x(t_0,c_1,\cdots,c_6), \\ y_0=y(t_0,c_1,\cdots,c_6), \\ z_0=z(t_0,c_1,\cdots,c_6), \\ \dot{x}_0=\dot{x}(t_0,c_1,\cdots,c_6), \\ \dot{y}_0=\dot{y}(t_0,c_1,\cdots,c_6), \\ \dot{z}_0=\dot{z}(t_0,c_1,\cdots,c_6). \end{cases} \tag{4.12}$$

① 为了具体化起见，我们选用直角坐标形式来说明，其实对于各种曲线坐标都是适用的。

因为初位置坐标和初速度分量都是互相独立地给出的，所以相应的雅可比行列式应满足

$$\frac{\partial(x_0,y_0,z_0,\dot{x}_0,\dot{y}_0,\dot{z}_0)}{\partial(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6)} \neq 0。$$

因此，可由式(4.12)中解出六个常数为

$$c_k = f_k(t_0,x_0,y_0,z_0,\dot{x}_0,\dot{y}_0,\dot{z}_0) \quad (k=1,2,\cdots,6)。$$

这就是说，可以由(4.10)和(4.11)解出

$$f_k(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = c_k \quad (k=1,2,\cdots,6)。 \tag{4.13}$$

假设有

$$f(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = c$$

形式的方程，它只包含变量及其对 t 的一次导数，而且当把微分方程(4.9)的解(4.10)代入时，不论对于哪一组初条件都是满足的(当然常量 c 的数值可能不相同)，则此方程称为微分方程(4.9)的一个**初积分**（或称**首次积分**，**第一积分**）。式(4.13)给出了方程(4.9)的六个初积分。如果能知道所有六个初积分，就可以通过代数方法解出(4.10)和(4.11)。当知道一个初积分时，可以使方程(4.9)降一阶；知道两个初积分，方程降两阶；依次类推。所以引用初积分实际上是一种降阶法。初积分给出了位置和速度之间的关系，因此，就有可能利用初积分直接解答动力学的某些问题。

初积分是微分方程理论和方法中的一部分，我们讨论它不只是为了解算技巧方面的考虑。从力学方面看，某些初积分具有明确而重要的物理意义，它与动量、动量矩和能量守恒定理联系在一起，因而有可能把数学技巧与物理意义巧妙地结合起来。关于下面将讲到的三个基本定理以后还有专门的章节来讨论，在本节中只是初步给予一些说明，而且较多地从初积分的角度给以解释。

质点的动量积分

质点的运动微分方程可以写成

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{F}.$$

如果 $\boldsymbol{F}$ 只依赖于时间，且是时间 t 的已知函数，即 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(t)$，于是运动微分方程可写成

$$d(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{F}(t)\,dt.$$

对上式在任意两个时刻 t_0 与 t 之间积分，得

$$m\boldsymbol{v}-m\boldsymbol{v}_0=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{F}(t)\,dt, \tag{4.14}$$

其中 $\boldsymbol{v}_0$ 是质点在 t_0 时刻的速度，$\boldsymbol{v}$ 是 t 时刻的速度。

从微分方程的角度看，$\boldsymbol{v}$ 是 $\boldsymbol{r}$ 的一阶导数，所以微分方程已经由原来的二阶向量方程降为一阶了。实际上是三个一阶数量微分方程，这相当于三个初积分。从数量微分方程组的角度看，共计降了三阶。式(4.14)中的 $m\boldsymbol{v}$ 是质点在时刻 t 的动量，$\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{F}(t)\,dt$ 是外作用力 $\boldsymbol{F}(t)$ 在 t_0 到 t 这段时间间隔内的**冲量**。所以式(4.14)具有明确的物理意义，它称为质点的**动量定理**（或称**冲量定理**），即质点在时刻 t_0 到 t 之间的动量的改变等于这个时间间隔内外作用力的冲量。

如果在所考虑的时间间隔内作用力 $\boldsymbol{F}(t)$ 在 x 方向（或其他任何方向）的分量恒等于零，则由式(4.14)可得

$$mv_x=mv_{x0}.$$

这表示质点的动量在 x 方向的分量在运动过程中恒等于初动量在 x 方向的分量，即在 x 方向动量守恒。这相当于微分方程的一个初积分。如果外作用力恒等于零，则动量向量守恒，此时我们得到三个初积分。

例4.14 质量为m的小球，以初速$\boldsymbol{v}_1$与光滑地面碰撞，碰撞后以速度$\boldsymbol{v}_2$离开。设已知$\boldsymbol{v}_1$的大小和方向，$\boldsymbol{v}_2$的大小v_2（由于碰撞过程中的机械能损失，$v_2<v_1$）。求小球对地面的冲击力。

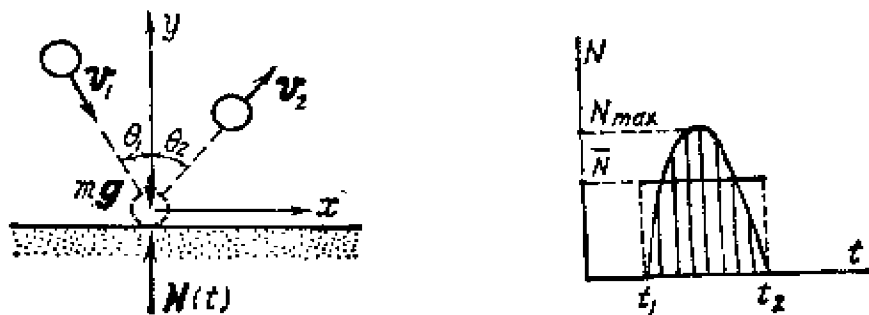


图4.21 质点对光滑固定面的碰撞

解 设碰撞过程在时间间隔(t_1, t_2)内发生。在此期间，小球受到两个力的作用，重力mg垂直向下，地面的约束力$\boldsymbol{N}$，因为地面是光滑的，所以垂直向上。$\boldsymbol{N}$的反作用力就是所求的小球对地面的冲击力。取x轴和y轴如图4.21所示。因为$\sum F_x=0$，所以在x方向动量守恒，立即便可写出一个初积分

$$mv_1\sin\theta_1=mv_2\sin\theta_2.$$

由此可以解出未知量θ_2。由于$v_2<v_1$，所以必定有$\theta_2>\theta_1$。

再取式(4.14)在y方向的投影，得到

$$\int_{t_1}^{t_2}(\boldsymbol{N}-mg)\,dt=mv_2\cos\theta_2-mv_1(-\cos\theta_1),$$

式中mg是常量，N是随时间变化的，其变化规律大致如图4.21中曲线所示。设N按正弦曲线变化，即

$$N=N_{\max}\sin\left(\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\cdot\pi\right),\qquad t_1\leqslant t\leqslant t_2,$$

其中$N_{\max}$是N的最大值。那么N的冲量为

$$\int_{t_1}^{t_2}N\,dt=\frac{2}{\pi}N_{\max}(t_2-t_1).$$

代入动量积分式，可求得最大冲击力

$$N_{max}=\frac{\pi m}{2(t_2-t_1)}\left[\sqrt{v_2^2-v_1^2\sin^2\theta_1}+v_1\cos\theta_1\right]+\frac{\pi}{2}mg.$$

在实际碰撞问题中，因为 t_2-t_1是一个很小的量，所以 N_{max} 要比 mg 大几个数量级，因而我们可以对碰撞问题作适当简化，这将在以后设专节来讨论。如果 $N(t)$ 的变化不是正弦型的，而是一段抛物线，由此求出的 N_{max} 与上面所得相差无几，只是将 $\pi/2=1.57$ 因子换成 $3/2=1.5$。在碰撞问题中，人们首先感兴趣的是冲击力的数量级。从这个角度看，两者就没有多大差别了。▌

*** 设碰撞期间 $N(t)$ 等于常量 N_0，验证上述比值 $\pi/2$ 和 $3/2$ 就成为 N_{max}/N_0。 ***

质点的动量矩积分

在静力学中，我们知道力$\boldsymbol{F}$对一点O的矩是 $\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$，其中 $\boldsymbol{r}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 作用点的向径。类似地，我们把质点的动量 $m\boldsymbol{v}$ 对一点O的矩定义为

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v},$$

叫做质点对O点的**动量矩**，或**角动量**，其中 $\boldsymbol{r}$ 是点O到质点的向径。

我们现在推演动量矩 $\boldsymbol{G}$对时间 t 的导数。

$$\frac{d\boldsymbol{G}}{dt}=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v})=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times m\boldsymbol{v}+\boldsymbol{r}\times\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}).$$

因为 $d\boldsymbol{r}/dt=\boldsymbol{v}$，所以第一项为零。根据牛顿第二定律，第二项

$$\boldsymbol{r}\times\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{r}\times(\sum\boldsymbol{F})=\sum(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}),$$

这里$\sum(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F})$是作用于质点上的力对O点的主矩$\boldsymbol{L}$。因而

$$\frac{dG}{dt}=\boldsymbol{L}. \tag{4.15}$$

这就是质点的**动量矩定理**：质点动量矩的变化率等于作用力的主矩。必须注意的是这两个矩应该是对同一个点(矩心)取的。

和动量守恒相仿，可以导出动量矩守恒的条件。如果作用力对某一轴的矩恒等于零，则动量矩在这个轴上的投影守恒，或说对这个轴的动量矩守恒，这也就得到了运动微分方程的一个初积分。如果作用力对点的矩恒等于零，则动量矩向量守恒，即 $\boldsymbol{G}=$ 常向量，这代表运动微分方程有了三个初积分。用直角坐标表示就是，如果作用力对 z 轴的矩等于零，即

$$\sum m_z(\boldsymbol{F})=0,$$

则

$$G_z=\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{k}=x(m\dot{y})-y(m\dot{x})=\text{常量},$$

或

$$x\dot{y}-y\dot{x}=\text{常量}.$$

这就是一个初积分。如果 $\sum \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})=0$，那么可以由动量矩守恒定理得出三个初积分：

$$x\dot{y}-y\dot{x}=c_1;\quad y\dot{z}-z\dot{y}=c_2;\quad z\dot{x}-x\dot{z}=c_3,$$

其中常量 c_1, c_2, c_3 由初条件确定。

直角坐标形式的动量矩守恒定理，直观上不容易理解，因此我们换一种方式来讨论。设一个质点对某一点 O 的动量矩守恒，即 $\boldsymbol{r}\times(m\boldsymbol{v})$ 是常向量，将这个向量记作 $\boldsymbol{G}_O$。根据向量叉乘的性质，$\boldsymbol{r}$ 必须始终与常向量 $\boldsymbol{G}_0$ 垂直，因此质点必在过 O 点并与 $\boldsymbol{G}_O$ 垂直的平面内运动。所以由动量矩守恒定理得出的**第一个结论**是：质点的运动轨迹是一条平面曲线。我们在此平面内取极坐标系，原点取在 O 点(图4.22)。根据运动学的结果，不难算出

$$|G|=|r\times mv|=\rho^2|\dot{\varphi}|,$$

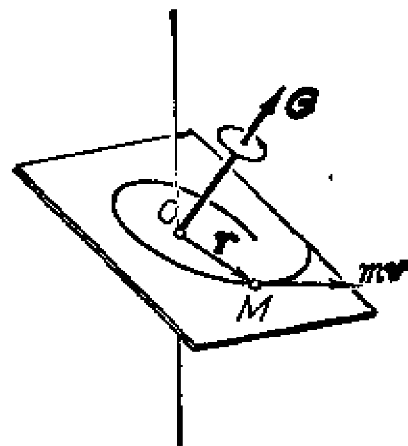


图4.22　动量矩守恒，质点的轨迹是平面曲线

其中 ρ,φ 是质点的极坐标。根据动量矩守恒定理得

$$\rho^2\dot{\varphi}=\text{常量}。$$

在运动学中已知道 $\frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}$ 就是向径在单位时间内扫过的面积，即面积速度(图2.29)。所以由动量矩守恒定理得出的第二个结论是：面积速度是常量。从数学上说，同样是求出初积分，但在这里用极坐标比用直角坐标在直观上要明确得多。在解各种具体的力学问题时，我们应该十分重视坐标系选取的技巧。

例4.15 "日行盈缩" 地球绕太阳运动的轨道是一椭圆，太阳在椭圆的一个焦点 O 上。我们将要在4-7中由万有引力及牛顿定律推导出这一结果。

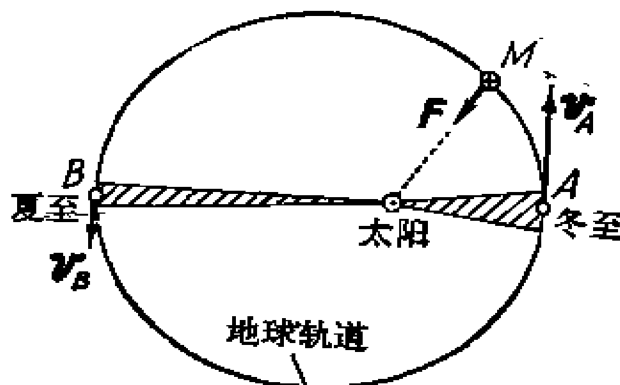


图4.23　日行盈缩的原因

在冬至前后，地球在 A 处(图4.23)，离太阳最近。而在夏至前后，地球在 B 处，离太阳最远。地球受到的力是太阳的引力，此力对 O 点（太阳）的矩为零，因此地球的动量矩守恒，即

$$mv_A\cdot\overline{OA}=mv_B\cdot\overline{OB}.$$

因为 $\overline{OA}>\overline{OB}$，所以 $v_A<v_B$。如用面积速度表示，图中左右两块有阴线的面积，表示同样一个时间间隔内（比如说一天）向径

扫过的面积，这两块面积相等，因而 A 处的弧要比 B 处的弧长，即地球在冬天走得快，在夏天走得慢。如从地球上看，好象太阳（日）的运动（行）有快慢（盈缩）。我国南北朝时（公元530年前后）张子信在海岛上用圆管测天，观测了三十年后发现了这个“日行盈缩”的规律。当然，当时他不知道地球绕着太阳走的“日心说”，也不知道动量矩守恒定理，所以无从解释其原因。∎

质点的能量积分

设质点沿 x 轴运动，而且受到的力沿 x 轴，力的大小只与位置有关。于是运动微分方程可写成

$$m\ddot{x}=F(x)。$$

在这种情况下，如果 $F(x)$ 是可积函数，则很容易找出一个初积分。将上式改写成

$$m\dot{x}d\dot{x}=F(x)\,dx。$$

设初条件是：当 $t=t_0$ 时，$x=x_0$，$\dot{x}=v_0$。将上式从 $t=t_0$ 到任意时刻 t 积分

$$\int_{v_0}^{v} m\dot{x}d\dot{x}=\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx$$

或写成

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx, \qquad (4.16)$$

其中 $mv^2/2$ 和 $mv_0^2/2$ 表示质点在 t 和 t_0 时刻的动能。定义力 F 与位移 $d\boldsymbol{r}$ 的点积 $\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ 为该力所作的元功。在目前情况下，质点的位移是 $dx\boldsymbol{i}$，力是 $F\boldsymbol{i}$，所以力所作的元功是 Fdx。当质点从 x_0 移动到 x 时，力 F 所作的总功就是式(4.16)右边的表达式。式(4.16)所包含的物理内容称为**质点的动能定理**：质点动能的改变量等于外力所作的功。

如力函数 $F(x)$ 可积，令

$$\int F(x)\,dx = -V(x).$$

V 称为**势能**①，所以式(4.16)就可以写成

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = V(x_0) - V(x),$$

或写成

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = \frac{1}{2}mv_0^2 + V(x_0). \tag{4.17}$$

质点动能和势能之和称为质点的**机械能**。式(4.17)表示，质点任意时刻的机械能与初始时刻的机械能相等，即机械能量守恒。这就是一维情况下的**机械能守恒定理**。式(4.17)是运动微分方程的一个初积分。

不难把一维的结果推广到一般的三维情况。设力 $\boldsymbol{F}$ 只与位置 $\boldsymbol{r}$ 有关，以直角坐标为例，$\boldsymbol{F}$ 只是 x,y,z 的函数。如果存在一个单值的可微函数 $V(x,y,z)$，它与力 $\boldsymbol{F}$ 的关系是

$$\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}\,V \text{ ②}. \tag{4.18}$$

满足关系式(4.18)的力 $\boldsymbol{F}$ 叫做**有势力**或**保守力**。$V(x,y,z)$ 叫做**势能**。当质点作位移 $d\boldsymbol{r}$ 时，力 $\boldsymbol{F}$ 所作的元功是 $\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$。如果此力是保守力，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= F_x dx + F_y dy + F_z dz \\ &= -\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right) = -dV,\end{aligned}$$

---

① 关于势能，在第七章中还要进行详细的讨论。因为本节讨论的主题是初积分，所以偏重于数学方面的解释。在这里，积分常数包含在函数 $V(x)$ 中。当零势能位置确定后，$V(x)$ 就是确定的函数。

② 梯度 $\mathrm{grad}V = \frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k}$，此式表示力 $\boldsymbol{F}$ 的三个分量满足：

$$F_x(x,y,z) = -\partial V/\partial x,\quad F_y(x,y,z) = -\partial V/\partial y,\quad F_z(x,y,z) = -\partial V/\partial z.$$

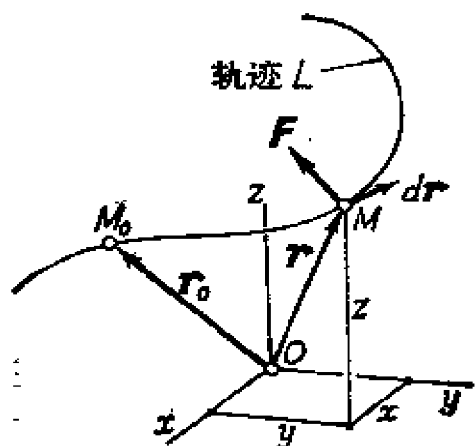


图4.24　有势力的功与路径无关

即 $F \cdot dr$ 是一个全微分。在这种情况下，如果质点从点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 开始，沿着某一条轨线 L 移动到点 $M(x, y, z)$（图4.24），则力 F 所作的总功为

$$\int_{沿L} F \cdot dr ① = \int_{沿L} -dV = V(x_0, y_0, z_0) - V(x, y, z)。\tag{4.19}$$

质点三维运动的方程是

$$m\frac{dv}{dt} = F。$$

两边分别点乘两个恒等的量 vdt 和 dr，得

$$mv \cdot dv = F \cdot dr。\tag{4.20}$$

等式左边是 $mv \cdot dv = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$，即动能的微分。等式右边是力 F 的元功。

将式（4.20）从 t_0（质点相应的位置为 (x_0, y_0, z_0)，速度为 v_0）到 t（相应于位置 (x, y, z)，速度 v）求积分，就得到

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = V(x_0, y_0, z_0) - V(x, y, z),$$

或写成

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x, y, z) = \frac{1}{2}mv_0^2 + V(x_0, y_0, z_0)。\tag{4.21}$$

等式右边是常量，记作 E，表示系统的总机械能。在得出式（4.21）的过程中，已经用到条件（4.18）和式（4.19）的结果。所以式

① 这是一个线积分，积分路径就是质点的运动轨线 L，由于 $F \cdot dr$ 是一个全微分，所以化成了一个多元函数的积分。最后的结果与积分路径无关，只与起终位置有关，详细讨论见7-2。

(4.21)的物理意义就是质点的**机械能守恒定理**：在只有保守力作用的情况下，质点的机械能守恒。式(4.21)是三维情况下的一个初初积分，而式(4.17)是它的特例。

例4.16 设质量弹簧系统如图4.25所示。两个弹簧原长均为l，弹性系数均为k。质点的质量为m，与两根弹簧相连，并放在光滑的水平面上。A与B两点固定不动，$AB=2a$，$a>l$。用能量积分方法求出质点在平衡位置附近作振动的周期。设(1) 振动方向沿AB；(2) 振动方向垂直于AB。

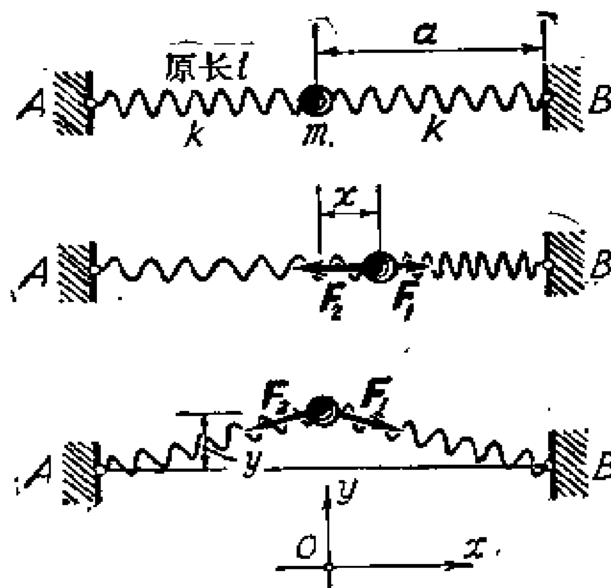


图4.25 质量弹簧系统

解 取x轴沿AB，向右为正，原点在AB中点，y轴在水平面内，垂直于AB。

先讨论情况(1)。质点受两根弹簧的作用力，它们是$\boldsymbol{F}_1$和$\boldsymbol{F}_2$，其合力在x方向的分量为

$$F_x=\boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{i}+\boldsymbol{F}_2\cdot\boldsymbol{i}=k(a-x-l)-k(a+x-l)=-2kx.$$

因为是沿x方向运动，所以$F_y=0$。质点的势能为

$$V=-\int F_x\,dx=-\int(-2kx)\,dx=k\,x^2+V_0,$$

其中V_0是积分常数。取质点的平衡位置作为势能为零的地方，即当$x=0$时，$V=0$。由此可定出积分常数V_0为零。

根据机械能守恒定理有

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2+kx^2=E(\text{常量})。$$

当质点达到最大振幅值 $x=A$时，速度应为零，因此可以定出机械能常量 E，即

$$E=kA^2。$$

代入上式可得关系式

$$\dot{x}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E-kx^2)}=\pm\sqrt{\frac{2k}{m}(A^2-x^2)}。$$

质点从 $x=0$ 运动到 $x=A$，所需时间是周期 T 的四分之一，因此根据关系式 $dt=dx/\dot{x}$，就可得到

$$\frac{T}{4}=\int_0^A\frac{dx}{\dot{x}}=\sqrt{\frac{m}{2k}}\int_0^A\frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{m}{2k}}\left[\arcsin\frac{x}{A}\right]_0^A=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}。$$

所以振动周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}。$$

这一结果与求解运动微分方程所得的结果是一致的。

下面讨论情况(2)，即质点沿 y 轴方向的振动。当质点在 y 方向有移动时，弹簧的长度为$\sqrt{a^2+y^2}$，弹簧的拉力大小是

$$F_1=F_2=k\left(\sqrt{a^2+y^2}-l\right),$$

它们在 y 方向的投影是

$$F_{1y}=F_{2y}=k\left(\sqrt{a^2+y^2}-l\right)\left(-y/\sqrt{a^2+y^2}\right)$$

$$=-ky+\frac{kly}{\sqrt{a^2+y^2}}。$$

所以质点在 y 方向所受的弹簧力是

$$F_y=F_{1y}+F_{2y}=-2ky+\frac{2kly}{\sqrt{a^2+y^2}}。$$

势能是

$$V(y)=\int_0^y\left(2ky-\frac{2kly}{\sqrt{a^2+y^2}}\right)dy$$

$$=ky^2-2kl(a^2+y^2)^{1/2}+2kla。$$

在以上计算中已经用到了将平衡位置作为势能起算点的条件。

根据与 x 方向振动的同样理由，可以计算周期

$$T=4\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^A\frac{dy}{\sqrt{V(A)-V(y)}}。$$

上式中的振动周期 T 一般地与振幅 A 的大小有关。将 $V(y)$ 的表达式代入上式，就可算出周期 T，但运算比较复杂。因为按题意是考虑平衡位置附近的振动，即 y 与 A 都是小量，故可以进行近似计算。将 $V(y)$ 展成幂级数，并略去高阶小量，得到

$$V(y)\approx k\left(1-\frac{l}{a}\right)y^2。$$

则
$$V(A)\approx k\left(1-\frac{l}{a}\right)A^2。$$

代入 T 的积分式，得到

$$T=4\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^A\frac{dy}{\sqrt{k\left(1-\frac{l}{a}\right)(A^2-y^2)}}=2\pi\sqrt{\frac{ma}{2k(a-l)}}。$$

值得注意的是，此时周期与弹簧的初始伸长 $(a-l)$ 有关。当 a 接近 l 时，振动周期很大。a 越大（弹簧绷得越紧），振动周期越小，但是最小不小于 x 方向的振动周期 $2\pi\sqrt{m/2k}$。 ▌

例4.17 用能量积分的方法讨论例4.5（图4.8）。

解 初速垂直向上，则质点是一维运动。质点所受的地心引力为

$$F_x=-mgR^2/x^2。$$

取无穷远处势能为零，则势能可写成

$$V(x)=-mgR^2/x。$$

所以能量积分为

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2-mg\frac{R^2}{x}=\frac{1}{2}mv_0^2-mgR.$$

为了求出可能达到的最高点，以 $x=R+H$， $\dot{x}=0$ 代入上式，并解出 H 得

$$H=\frac{Rv_0^2}{2gR-v_0^2}.$$

这与例4.5中的结果一样。

为了求出逃逸速度，只要将 $x\to\infty$， $\dot{x}\to 0$ 代入能量积分表达式，便可得相应的初速为 $v_0=\sqrt{2gR}$。再有，如果 $v_0^2>2gR$，则不存在能使 $\dot{x}$ 成为零的正 x 值，这是因为

$$\dot{x}^2=v_0^2-2gR+2mgR^2/x>0.$$

这就回答了例 4.5 最后所提出的疑问。初速大于逃逸速度时，上抛的质点将一去而不复返。

如果从地面抛出的初速不是竖直向上的，则质点的运动将不是一维的。我们现在计算此时的逃逸速度。质点受到的引力是

$$\boldsymbol{F}=-\frac{mgR^2}{r^3}\boldsymbol{r}.$$

可以验证，此时的势能表达式是

$$V(r)=-mgR^2/r.$$

式中 r 是 $\boldsymbol{r}$ 的模，即 $r^2=x^2+y^2+z^2$。因为

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{mgR^2}{r}\right)=\frac{mgR^2}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{mgR^2}{r^3}x,$$

它正好是 $-F_x$。同理可以验证

$$\frac{\partial V}{\partial y}=-F_y,\quad \frac{\partial V}{\partial z}=-F_z.$$

即引力是保守力，根据机械能守恒定理，可以得到一个初积分，

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{mgR^2}{r}=\frac{1}{2}mv_0^2-mgR.$$

可见这个式子的成立，并不限于质点作直线运动的情况。

为了求出逃逸速度，从物理方面看，必须满足的条件是：当质点趋向无穷远之前，其动能不应为零。即如果令 $r\to\infty$，相应地 $(mgR^2/r)\to 0$（因无穷远处势能为零），必须有$\frac{1}{2}mv^2\geqslant 0$。由此得出条件：

$$\frac{1}{2}mv_0^2-mgR\geqslant 0,$$

或

$$v_0\geqslant\sqrt{2gR}.$$

此条件说明初速必须不小于$\sqrt{2gR}$，质点才能运动到无穷远处。这和垂直上抛时得出的结果是完全一样的。▌

例4.18 设单摆的摆锤质量为 m，摆长为 l，摆锤由一轻质刚杆（质量忽略不计）与固定支点连接，并可在竖直平面内自由摆动（图4.16）。应用初积分求单摆的运动周期。

解 把摆锤当作一个质点处理。它受到两个力的作用，即杆的作用力和重力 mg，杆的作用力在运动过程中不作功，重力是保守力。以悬挂点的高度作为重力势能的零点，则质点的势能为

$$V(\varphi)=-mgl\cos\varphi.$$

先考虑微幅摆动，即$|\varphi|\ll 1$，于是势能 V 近似地为$-mgl(1-\varphi^2/2)$。质点的动能为$\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$，根据机械能守恒定理，能量初积分是

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2-mgl\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right)=\text{常量}.$$

显然，如果把这个初积分对时间 t 求导，我们就回到了微幅摆动的微分方程，即

$$\ddot{\varphi}+(g/l)\varphi=0.$$

因而单摆微幅振动的周期为

$$T_0=2\pi\sqrt{l/g}.$$

当摆动比较大时，能量积分为

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2-mgl\cos\varphi=E.$$

设摆幅为 $A(<\pi)$，即当 $\varphi=A$ 时，$\dot{\varphi}=0$。于是定出常量 $E=-mgl\cos A$，代入能量积分就成为

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2=mgl(\cos\varphi-\cos A).$$

解得

$$\frac{d\varphi}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\varphi-\cos A)}.$$

振动周期为

$$T=4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^A\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos A}}.$$

上式又可化成

$$T=2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^A\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}}.$$

这个积分不能用初等函数表示出来，它可以化成所谓第一类椭圆函数如下：

令 $k=\sin(A/2)(<1)$，$u=\sin\frac{\varphi}{2}\Big/\sin\frac{A}{2}$，则

$$du=\frac{\cos(\varphi/2)}{2\sin(A/2)}d\varphi=\frac{\sqrt{1-k^2u^2}}{2k}d\varphi.$$

最后可得

$$T=4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^1\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

这个积分对于不同的摆幅 A（或 k）可由椭圆积分表查出数值解答。它也可以用近似方法进行计算。按照 k 的级数展开，求出

$$(1-k^2u^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}k^2u^2+\frac{3}{8}k^4u^4+\cdots,$$

于是

$$T=4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\left(1+\frac{1}{2}k^2u^2+\frac{3}{8}k^4u^4+\cdots\right)du$$

$$=4\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}k^2+\frac{9\pi}{128}k^4+\cdots\right)$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{4}k^2+\frac{9}{64}k^4+\cdots\right).$$

对于不太大的摆幅A，有

$$k=\sin\frac{A}{2}\approx\frac{A}{2}-\frac{A^3}{48},$$

故有

$$T\approx2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{16}A^2+\frac{11}{3072}A^4\right).$$

表4.1给出了对不同摆幅，用三种不同的近似公式算出的大

表4.1

摆幅 A(度)	摆幅 A(弧度)	$1+\frac{A^2}{16}$	$1+\frac{A^2}{16}+\frac{11}{3072}A^4$	精确值
0°	0.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5°	0.0873	1.0005	1.0005	1.0005
10°	0.1745	1.0019	1.0019	1.0019
20°	0.3491	1.0076	1.0077	1.0077
40°	0.6981	1.0305	1.0313	1.0313
60°	1.0472	1.0685	1.0728	1.0732
90°	1.5708	1.1542	1.1760	1.1804
120°	2.0944	1.2742	1.3431	1.3729
150°	2.6180	1.4284	1.5966	1.7622
179°	3.1241	1.6100	1.9511	3.9010
180°	3.1416	1.6169	1.9656	∞

摆幅周期T与微摆幅周期$T_0=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$之比值。从中可以看出，当摆幅为90°时，用微幅振动公式的误差为18%，用公式$T/T_0=1+A^2/16$时的误差不到3%，而用公式$T/T_0=1+A^2/16+11A^4/3072$时的误差不到1%。▌

4-6 相平面方法

在微分方程的求解中，我们可以选用新的变量，使得微分方程降阶。一种常用的办法是把速度当作新变量。例如，在讨论质点的一维运动时，设作用于质点上的合力仅仅是位置与速度的函数，则运动微分方程是

$$m\ddot{x}=F(x,\dot{x})。$$

把$\dot{x}$当作一个新的变量，并记为v（这里v是代数量，可以取负值），$\ddot{x}$可写成

$$\ddot{x}=\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}=v\frac{dv}{dx}。$$

因此原方程又可改写为

$$mv\frac{dv}{dx}=F(x,v)。\tag{4.22}$$

式(4.22)是v与x的一阶微分方程。把x当作横坐标，v当作纵坐标（这个“坐标”的量纲不是[长度]），则x-v坐标平面就叫做**相平面**。质点在某一时刻的状态（一定的位置和速度）对应于相平面上的一个点，叫做**相点**。在给定一组初条件x_0,v_0(对应相平面上的一个初相点)以后，可求出一阶微分方程(4.22)的一个解，它对应于这个相平面上的过初相点的一条曲线，叫做**相轨迹**。通过对相平面上相轨迹的分析，可以了解质点的某些运动特征。相平面方法的优点是几何直观性强。在保守力作用的情况下，能量积分直接就给出了x与v的关系，所以机械能守恒定理与相平面方法有密切的联系。这就有可能把物理定理与几何直观结合起

来，以研究某些动力学问题。相平面方法在一维运动中比较实用，其缺点是在多维的情况下虽然也能推广，但实用性比较差。本节只讨论一维的情况。相平面（或相空间）方法在振动理论及统计物理中采用得比较多。

例4.19 无阻尼质量弹簧系统的相轨迹。

系统的运动微分方程是

$$m\ddot{x}=-kx. \tag{1}$$

初条件是，当 $t=0$ 时，$x=x_0$，$\dot{x}=v_0$。

引入新变量 $v=\dot{x}$，方程（1）可写成

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{\omega^2 x}{v}. \tag{2}$$

其中 $\omega^2=k/m$。这个一阶微分方程的初条件是，当 $x=x_0$ 时，$v=v_0$。在相平面上（图4.26）这个初条件对应于一个点 P_0，其坐标是 (x_0,v_0)。随着时间的增加，质点的位置与速度发生变化，而此相应的相点 $P(x,v)$ 就在相平面上移动，移动的规律应满足方程(2)。

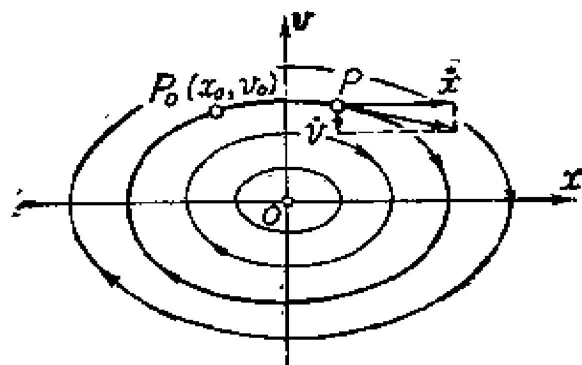


图4.26 无阻尼情况的相平面图

方程(2)的通解是

$$v^2+\omega^2x^2=\text{常量}, \tag{3}$$

它是相平面上的一族椭圆。对于确定的初条件 (x_0,v_0)，定出积分常数为 $v_0^2+\omega^2x_0^2$，得到方程(2)的一个特解

$$v^2+\omega^2x^2=v_0^2+\omega^2x_0^2.$$

这是一条经过初始相点 $P_0(x_0,v_0)$ 的椭圆曲线。初始时刻，相点在 P_0 处，随着时间增加，相点沿椭圆轨线，顺着箭头所示的方向移动。因为在相平面的上半平面 $v>0$，即随着时间的增

加，x 增加，所以箭头向右。反之，在下半平面箭头向左。相轨迹是封闭曲线表示质点的运动是周期运动。相点行至椭圆轨线与横坐标相交点时，$v=0$，真实质点此时位移达到最大值。因此，此时的 $|x|$ 值（图4.26中椭圆的半长轴）就是质点的振幅。不同的初条件，对应不同的椭圆轨线，因而对应不同的振幅。使方程(2)分子与分母同时为零的点是原点(0,0)，此时真实质点所受的作用力为零，所以加速度为零，同时速度为零。所以相平面上的原点对应于质点的平衡位置。按常微分方程理论，方程(2)给定了相平面上的任意点的积分曲线（就是相轨迹）的斜率。因此通过相平面上的任意点，只能有一条积分曲线，但是同时使(2)式分子与分母为零的点除外，这样的点叫做奇点。奇点与质点的平衡状态相对应。 ▌

例4.20 有阻尼质量弹簧系统的相轨迹。

系统的运动微分方程是

$$m\ddot{x}=-kx-c\dot{x}.$$

引入 $v=\dot{x}$ 后，方程变为

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{\omega^2x+2nv}{v},$$

其中 $\omega^2=k/m, n=c/2m$.

我们只讨论小阻尼情况，即 $n<\omega$ 的情况（$n>\omega$ 的情况可以作类似的讨论）。由上式积分得到相轨迹的方程为

$$v^2+2nvx+\omega^2x^2=C\ \exp\left(2\frac{n}{\omega_0}\text{arc tg}\frac{v+nx}{\omega_0 x}\right),$$

其中 exp(…) 代表(…) 的指数函数，$\omega_0^2=\omega^2-n^2$，C 是积分常数，由初条件确定。不同的 C 值对应不同的相轨迹，它们是一族螺旋曲线[①]（图4.27）。对于已知的初相点 (x_0,v_0) 有唯一的相轨迹通过它。相点沿轨迹的运动在 x 轴上的投影代表真实质点的直线运

① 在这种情况下，根据相轨迹方程画螺旋曲线是十分麻烦的，可应用常微分方程中讲过的等倾线方法近似地画出。

动。由图4.27中明显地看出，质点来回振动，无数次经过平衡位置，振幅逐渐减小，最后趋向于平衡状态。

我们可以利用图 4.26 和图 4.27 的对比来说明阻尼对自由振动的影响。将图 4.27 中某一条轨线与图 4.26 中椭圆族画在一起(图4.28)。

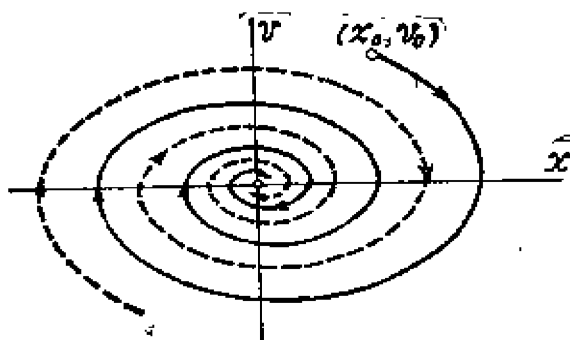


图4.27 有阻尼情况的相平面图

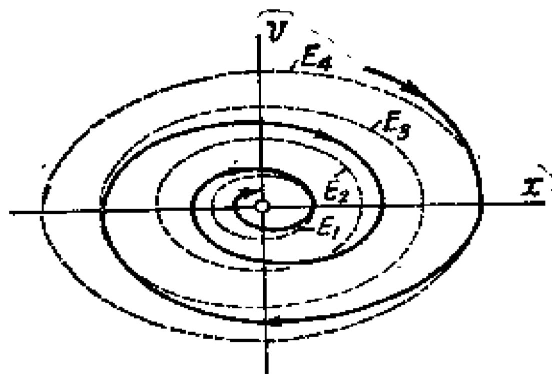


图4.28 有阻尼和无阻尼情况的比较

椭圆轨迹的方程是

$$v^2+\omega^2x^2=\text{常量}。$$

而质点的总机械能是

$$E=\frac{1}{2}m(v^2+\omega^2x^2)。$$

因此，每一条椭圆轨迹都是等能量线。如 $E_1<E_2<\cdots$，则对应的椭圆轨迹如图 4.28 所示。

上面说的是机械能守恒的情况。有阻尼力后质点的机械能仍然是 $E=\frac{1}{2}m(v^2+\omega^2x^2)$，它随时间的变化率是

$$\frac{dE}{dt}=m\left(v\frac{dv}{dt}+\omega^2x\frac{dx}{dt}\right)。$$

因为 $\frac{dv}{dt}=-\omega^2x-2nv$，$\frac{dx}{dt}=v$，代入上式得

$$\frac{dE}{dt}=-2mnv^2\leqslant0。$$

可见，除了在 $v=0$ 外，dE/dt 总是小于零。反映在相平面上，螺旋线除了在 x 轴上与等能量椭圆相切外，其余各点都是从椭圆的外侧钻向内侧。这样，阻尼振动时机械能不断减少的这个物理特征可以在相平面上用几何图形充分表示出来。▌

下面应用相平面方法讨论在保守力作用下**质点的平衡位置及其稳定性。**

设质量为 m 的质点沿直线 x 运动时，受保守力 $\boldsymbol{F}$ 的作用，$V(x)$ 为势能，即 $\boldsymbol{F}=-V'(x)\boldsymbol{i}$。这时运动微分方程为

$$m\ddot{x}=-V'(x),$$

能量积分为

$$\frac{1}{2}mv^2+V(x)=E,$$

这就是相轨迹的方程。

设势能 V 与位置 x 的关系如图 4.29(a) 所示，对于不同的 E 值，即 $E_1,E_2,\cdots,E_5$，相应的相平面上的轨迹分布如图 4.29(b) 所示。比如，水平线 $E=E_3$ 和曲线 $V(x)$ 相交于 $x=a,b,c$ 三处。当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，以及当 $x\geqslant c$ 时，就可得出相应的轨迹

$$v=\pm\frac{2}{m}\sqrt{E_3-V(x)}.$$

式中正或负号表明，相轨迹关于 x 轴上下对称。因为在 $x=a,b,c$ 处，$V=E_3$，所以有 $v=0$。在 $b<x<c$ 和 $x<a$ 的范围内，因为 $V>E_3$，对应的 v 没有实数解，所以在此范围内不可能有相应的相轨迹。

设 $V'(x)=0$ 的根是 ξ_1,ξ_2,ξ_3。从几何上看，x 取这些值时 $V(x)$ 曲线具有水平切线。从物理上看，质点在这些位置上所受的力为零，所以它们是平衡位置。可以分析出这三个平衡位置的性质是不同的。在使 V 取极小值的 $x=\xi_1$ 点附近，质点如在 ξ_1 点的左边，此处 $V'<0$，表示力 $\boldsymbol{F}=-V'(x)\boldsymbol{i}$ 指向右；反之，质点如在 ξ_1 点的右边，则力 $\boldsymbol{F}$ 指向左边。因此当质点偏离 $x=\xi_1$ 这个

平衡位置时，力 F 总是力图把它拉回来，所以称这个位置为**稳定的平衡位置**。对于 $x=\xi_3$ 这个平衡位置，质点不管偏离在它的哪

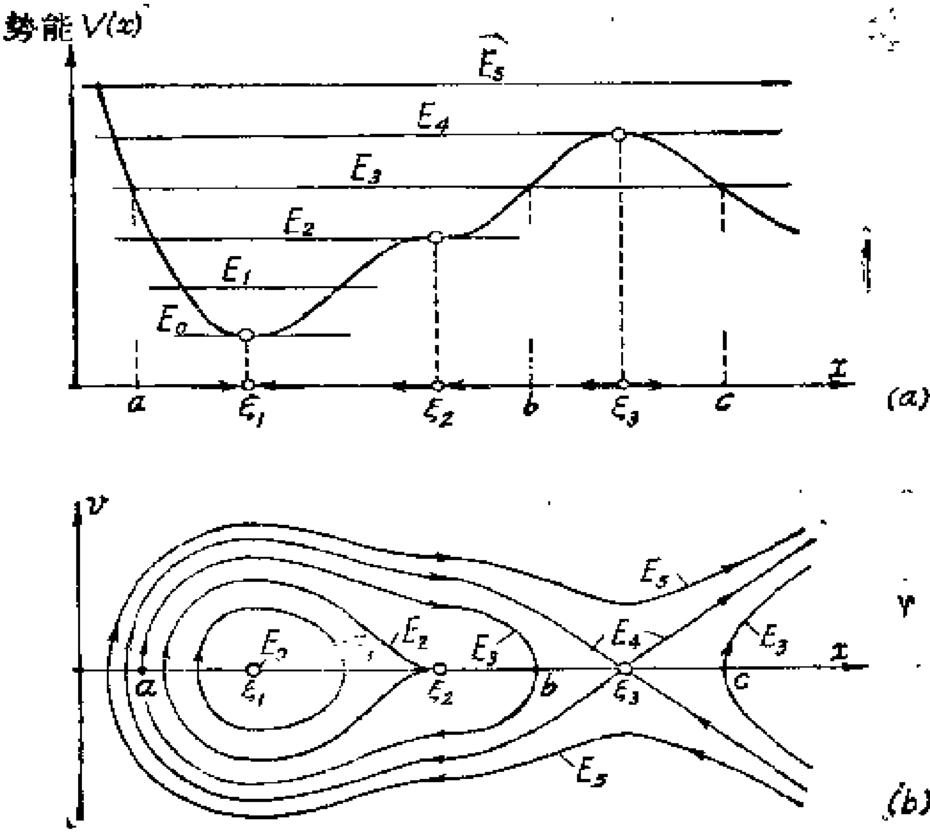


图4.29 保守力作用下质点的相图

一边，力 F 总是把它更加推开，所以称为**不稳定的平衡位置**。至于 $x=\xi_2$ 这个平衡位置，向左偏离时所受力的指向象不稳定的情形，而向右偏离时所受力又象是稳定的，所以称它为**半稳定的平衡位置**，也属于不稳定这一类。总之，质点的势能达到极小值时所对应的位置是稳定的平衡位置，达到极大值或拐点时所对应的位置是不稳定的平衡位置。对于不稳定的平衡位置，只要稍微有一些干扰（这在实际情况中总是存在的），使质点稍有偏离，那么这种偏离就会越来越大，平衡状态必然被破坏，所以只有稳定的平衡才能在物理上得到实现。

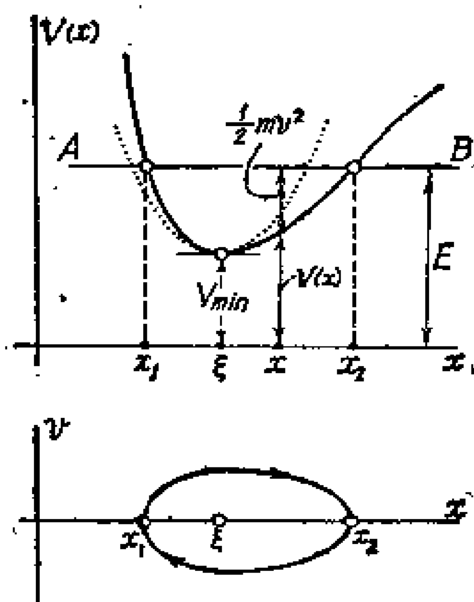


图4.30　稳定平衡位置附近的振动

现在研究稳定平衡位置附近质点运动的性质。设 $V(x)$ 在 $x=\xi$ 达到极小值 V_{min}，因为动能不能是负值，所以当质点在 $x=\xi$ 附近运动时，其总能量 E 不能小于 V_{min}。当给定质点一个初位置 x_0，初速度 v_0后，就确定一个 E 值。在 $V(x)$ 曲线图上作一平行线 AB，离 x 轴距离为 E（图4.30）。在任意位置 x 有

$$\frac{1}{2}mv^2=E-V(x),$$

其大小如图中所示。于是质点运动只能限于 x_1 和 x_2 之间，x_1 和 x_2 是 $E-V(x)=0$的两个根。在 $x<x_1$ 和 $x>x_2$ 的范围内，动能将出现负值，这是不可能的。质点运动所对应的相轨迹是一条封闭曲线，这说明只要质点稍微偏离平衡位置，就会在它附近作周期振动。振动的周期是

$$T=2\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{v}=\sqrt{2m}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{E-V(x)}}. \qquad (4.23)$$

一般说来，周期与振动的幅度 (x_2-x_1) 有关。当考虑微振动时，质点离开平衡位置 ξ 的距离 $|x-\xi|$ 是一个小量，可以将 $V(x)$ 在 $x=\xi$ 附近展成幂级数：

$$V(x)=V(\xi)+V'(\xi)(x-\xi)+\frac{1}{2}V''(\xi)(x-\xi)^2$$

$$+\frac{1}{3!}V'''(\xi)(x-\xi)^3+\cdots\cdots,$$

其中 $V(\xi)=V_{min}$。因为是平衡位置，所以有 $V'(\xi)=0$。又因为

平衡位置是稳定的，对应的V取极小值，所以有$V''(\xi)\geqslant 0$。

略去二阶以上的小量，取近似式有

$$V(x)\approx V_{min}+\frac{1}{2}V''(\xi)(x-\xi)^2,$$

它由图中虚抛物线所代表。将上述$V(x)$代入式(4.23)中便可求出振动周期的近似值。我们从另一个角度来更为简便地求出这个近似值。由$V(x)$的近似式可得

$$F(x)=-V'(x)\approx -V''(\xi)(x-\xi),$$

因此质点的线性化运动微分方程为

$$m\ddot{x}+V''(\xi)(x-\xi)=0。$$

它的通解是

$$x-\xi=A\sin\left(\sqrt{\frac{V''(\xi)}{m}}+\varphi\right).$$

由此可见，微幅振动的圆频率是

$$\omega=\sqrt{V''(\xi)/m}. \qquad (4.24)$$

相应的周期是

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{V''(\xi)}}.$$

将上式和质量弹簧系统中的公式(4.5)比较，可见这里的$V''(\xi)$起着“折合弹簧系数”的作用。

对于一般的情况，可以有如下的定理。

定理 对于单自由度系统，其运动由一个广义坐标q的变化，即$q=q(t)$所代表。如果系统只受保守力作用且动能为

$$T=\frac{1}{2}f(q)\dot{q}^2;$$

势能为$V=V(q)$；稳定的平衡位置为$q=\xi$。则系统在平衡位置附近作微振动的频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{V''(\xi)}{f(\xi)}}. \qquad (4.25)$$

证明 因为系统只受保守力作用，由机械能守恒得

$$\frac{1}{2}f(q)\dot{q}^2+V(q)=E. \qquad (4.26)$$

将动能和势能均在平衡位置$q=\xi$附近展开：

$$f(q)=f(\xi)+f'(\xi)(q-\xi)+\cdots\cdots,$$

$$V(q)=V(\xi)+V'(\xi)(q-\xi)+\frac{1}{2}V''(\xi)(q-\xi)^2+\cdots\cdots,$$

代入方程(4.26)，并略去二阶以上的小量，又考虑到$V'(\xi)=0$，得

$$\frac{1}{2}f(\xi)\dot{q}^2+V(\xi)+\frac{1}{2}V''(\xi)(q-\xi)^2=E.$$

对t求一次导数得

$$f(\xi)\ddot{q}+V''(\xi)(q-\xi)=0.$$

因为$V''(\xi)>0$，所以系统的振动频率为

$$\omega=\sqrt{V''(\xi)/f(\xi)}.$$

由此可得微振动的周期为

$$T=2\pi\sqrt{f(\xi)/V''(\xi)}.$$ 证毕。

例4.21 求上节例4.16中质点沿y轴方向作微幅振动时的频率(图4.25)。

解 在例4.16中已求得势能表达式为

$$V(y)=ky^2-2kl(a^2+y^2)^{\frac{1}{2}}+2kla.$$

将上式对y求导两次得

$$V'(y)=2ky-2kly(a^2+y^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$V''(y)=2k+2kly^2(a^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}-2kl(a^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

以$y=0$代入可得

$$V'(0)=0, \quad V''(0)=2k-2kl/a>0.$$

所以$y=0$是稳定的平衡位置。由公式(4.24)，质点在这个稳定平衡位置附近作微幅振动的频率是

$$\omega=\sqrt{\frac{V''(0)}{m}}=\sqrt{\frac{2k(a-l)}{ma}},$$

相应的周期是$2\pi/\omega$。 ▌

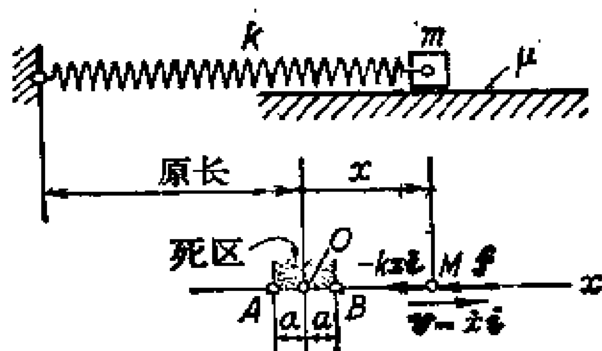


图4.31 有干摩擦的质量弹簧系统

＊＊＊ 分析单摆两个平衡位置（最低点和最高点）的稳定性，并用上述办法求出单摆微振动的频率。＊＊＊

例4.22 干摩擦力对振动的影响。设质量弹簧系统如图4.31所示。物块在粗糙水平面上运动，摩擦系数为μ，物块质量为m，弹簧系数为k，不计空气阻力。用相平面方法讨论物块的振动情况。

解 取原点在弹簧未伸长时物块的位置，x轴水平向右为正。最大静摩擦力为μmg，只要弹簧力$k|x|$不大于数值μmg，物块所受到的合力就是零。因此只要在此范围内，物块的速度一旦为零，就能保持平衡，所以满足条件

$$|x|\leqslant\mu mg/k$$

的所有位置都是物块的平衡位置。令$a=\mu mg/k$。我们把相平面上横坐标轴上的区间$AB[-a,a]$（图4.32）叫做死区，意思是

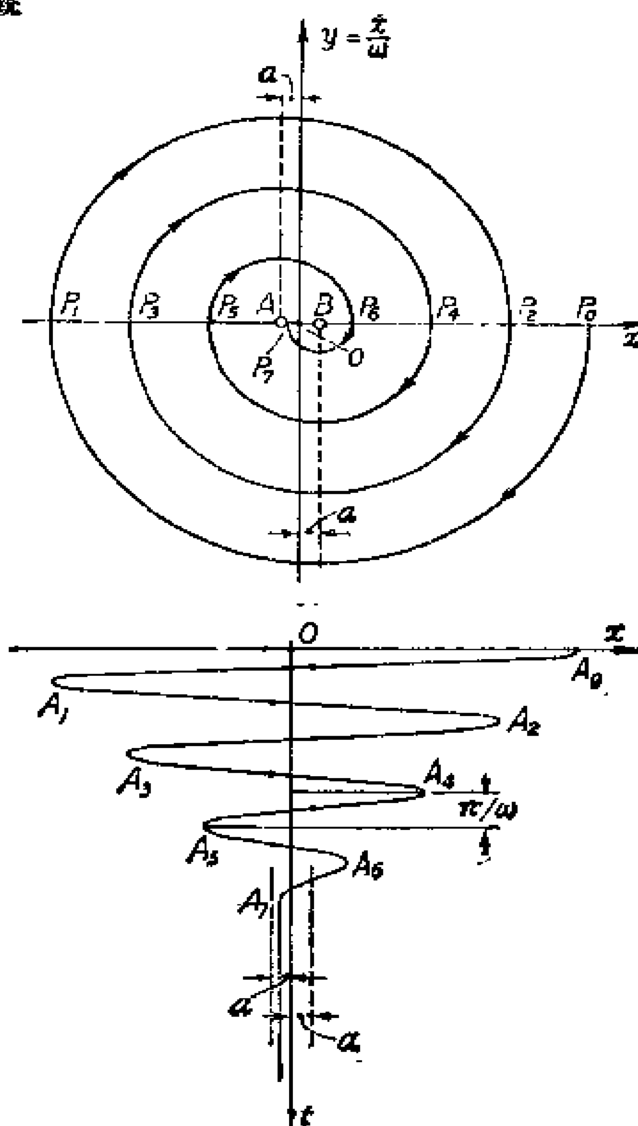


图4.32 有干摩擦时质量弹簧系统的相轨迹和x-t图

相点一旦落到这一区间内物块的运动就终止了。

物块运动时，所受到的摩擦力 f 的大小是常数 μmg，方向与速度相反，故应写成

$$f=\begin{cases}-\mu mg, & \text{当}\ \dot{x}>0,\\ +\mu mg, & \text{当}\ \dot{x}<0.\end{cases}$$

或用死区的半宽度 a 代入，写成

$$f=\begin{cases}-ka, & \text{当}\ \dot{x}>0,\\ +ka, & \text{当}\ \dot{x}<0.\end{cases}$$

因此，物块的运动微分方程应该分两部分写出来

$$m\ddot{x}=\begin{cases}-k(x+a), & \text{当}\ \dot{x}>0,\\ -k(x-a), & \text{当}\ \dot{x}<0.\end{cases}$$

为了使相图简单起见，相平面纵坐标不取 $\dot{x}$ 而改用 $y=\dot{x}/\omega$（y 的量纲是［长度］），并取 $\omega=\sqrt{k/m}$，于是运动微分方程可改写成

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\omega y,\\ \dfrac{dy}{dt}=\begin{cases}-\omega(x+a), & y>0,\\ -\omega(x-a), & y<0.\end{cases}\end{cases}$$

将上式的第二式除以第一式，得相轨迹的微分方程为

$$\frac{dy}{dx}=\begin{cases}-(x+a)/y, & y>0,\\ -(x-a)/y, & y<0.\end{cases}$$

积分后得

$$(x+a)^2+y^2=\text{常量},\qquad y>0,$$

$$(x-a)^2+y^2=\text{常量},\qquad y<0.$$

这表明在相平面的上半平面（$y>0$）内，相轨迹是一族同心半

圆：$(x+a)^2+y^2=$常量，其圆心在 A 点 $(-a,0)$，即死区的左端点。在下半平面 $(y<0)$ 内，相轨迹则是另一族同心半圆：$(x-a)^2+y^2=$常量，其圆心在 B 点 $(a,0)$（图4.32）。

设初条件为 $x_0=A_0$，$\dot{x}_0=0$，即将弹簧拉长 A_0 而后无初速地放开。最初物块向左运动，$\dot{x}<0$，故相点在下半平面沿半圆弧 P_0P_1 移动，半圆的方程是 $(x-a)^2+y^2=(A_0-a)^2$。所以相点由 P_0 到 P_1 所经历的时间为

$$\int_{A_0}^{(-A_0+2a)}\frac{dx}{\dot{x}}=\frac{1}{\omega}\int_{A_0}^{(-A_0+2a)}\frac{dx}{-\sqrt{(A_0-a)^2-(x-a)^2}}=\frac{\pi}{\omega}.$$

这就是无摩擦时自由振动的半周期。当相点到达 P_1 后，物块将开始向右运动，即 $\dot{x}>0$，所以要改用上半平面的相图。尽管由 $\dot{x}<0$ 变为 $\dot{x}>0$ 时，力有跳跃性的变化，从而加速度有跳跃性的变化，但是 x 本身必须是连续的，速度 $\dot{x}$（或者 y）也必须是连续的。所以在相平面上的相轨迹应该是一条连续的曲线。相点到达 P_1 后，接着就沿着上半平面的半圆弧 P_1P_2 移动，经历的时间也同样是 π/ω。依次类推，相轨迹是由若干半圆弧连接起来的螺旋式曲线 $P_0P_1P_2\cdots P_7$。在到达 P_7 时，相点进入了死区，物块就静止了。对应这个相图，可以画出物块的动运方程曲线 $x(t)$，它由若干段半个正弦曲线连接而成，连接处 x 和 $\dot{x}$ 都是连续的。每经过半个周期，位移的最大值 $A_0=\overline{OP}_0$，$A_1=\overline{OP}_1$，$A_2=\overline{OP}_2$，…，$A_6=\overline{OP}_6$ 是按算术级数递减的（最后一个 A_7 除外），公差为 $2a$。所以物块必然在振动了有限次后，就能静止下来。 ▎

*** 用相平面的方法分析例4.4（图4.7）。***

4-7 有心力运动

如果质点在运动过程中，所受的力总是经过一个固定点 O（称为力心），我们把这样的力叫做有心力，这样的运动叫做**有心力运动**。取 O 点为原点，力可表成 $\boldsymbol{F}=F\boldsymbol{r}^0$，其中 $\boldsymbol{r}^0$ 是向径方

向的单位向量，而 F 是 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{r}^0$ 方向的投影 F_r的简写，它可正可负，取负值时代表力 $\boldsymbol{F}$ 指向力心，反之离开力心。有心力对 O点的矩为零，根据动量矩定理可知，质点对 O 点的动量矩 $\boldsymbol{G}$是常向量．因此，运动轨道是平面曲线，且面积速度为常量。在轨道平面内取极坐标(ρ,φ)，则可将动量矩的大小 G 为常量写成

$$m\rho^2\dot{\varphi}=G, \tag{4.27}$$

其中 G 由初条件确定。

如果力的大小只是质点到力心距离 ρ 的函数，即 $F=F(\rho)$，且函数 $F(\rho)$ 可积，则存在势能

$$V(\rho)=-\int F(\rho)d\rho.$$

于是在极坐标中能量积分为

$$\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2)+V(\rho)=E, \tag{4.28}$$

其中总机械能 E 为常量，可由初条件确定。

式(4.27)和(4.28)是有心保守力作用下质点运动微分方程的两个初积分。

由式(4.27)解出 $\dot{\varphi}$ 代入式(4.28)，并解出 $\dot{\rho}$，得

$$\dot{\rho}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}}\cdot\sqrt{E-V(\rho)-\frac{G^2}{2m\rho^2}}.$$

由此可求出 ρ 与 t 的关系为

$$t=\pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{d\rho}{\sqrt{E-V(\rho)-G^2/2m\rho^2}}.$$

积分以后反解出 $\rho=\rho(t)$，再代入式(4.27)，可得

$$\varphi=\varphi_0+\frac{G}{m}\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{\rho^2}.$$

$\rho(t)$ 和 $\varphi(t)$ 就是质点的极坐标运动方程，从中消去 t 就是轨迹方程。也可以由 $\dot{\rho}$ 和 $\dot{\varphi}$ 两式相除，得到 ρ 与 φ 之间的一阶微分方程

$$\frac{d\rho}{d\varphi}=\pm\sqrt{\frac{2m}{G^2}}\cdot\rho^2\cdot\sqrt{E-V(\rho)-\frac{G^2}{2m\rho^2}}. \qquad (4.29)$$

由此可以直接求出质点的轨迹方程

$$\varphi=\varphi_0+\sqrt{\frac{G^2}{2m}}\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{d\rho}{\pm\rho^2\sqrt{E-V(\rho)-G^2/2m\rho^2}}. \qquad (4.30)$$

现介绍求解有心力运动轨迹的另一个著名的比内(Binet)方程，它不从能量考虑，而直接从受力分析和运动微分方程出发，推导如下。质点的径向运动微分方程是

$$m(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2)=F(\rho). \qquad (4.31)$$

引进新的变量 $u=1/\rho$，则动量矩守恒式(4.27)(它是横向运动微分方程的初积分)可写成

$$\dot{\varphi}=\frac{G}{m}u^2.$$

分别将 $\dot{\rho}$ 和 $\ddot{\rho}$ 写成

$$\dot{\rho}=\frac{d\rho}{d\varphi}\dot{\varphi}=\frac{G}{m}u^2\frac{d\rho}{d\varphi}=-\frac{G}{m}\frac{du}{d\varphi},$$

$$\ddot{\rho}=-\frac{G}{m}\frac{d^2u}{d\varphi^2}\dot{\varphi}=-\frac{G^2}{m^2}u^2\frac{d^2u}{d\varphi^2}.$$

代入式(4.31)，得

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=-\frac{m}{G^2}\frac{1}{u^2}F\left(\frac{1}{u}\right), \qquad (4.32)$$

或写成

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)+\frac{1}{\rho}=-\frac{m\rho^2}{G^2}F(\rho).$$

这就是比内方程，它给出了 $1/\rho$ 与 φ 之间的一个二阶微分方程。当然，轨迹方程(4.30)应该满足这个微分方程，但在某些具体问题中，用比内方程反而比直接用它的一般解(4.30)更方便些。

* * *　验证式(4.30)满足比内方程。提示：利用

$$\frac{du}{d\varphi}=-\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\varphi}$$

和式(4.29)，而后将$(du/d\varphi)^2$的表达式对 φ 求导。＊＊＊

下面介绍关于有效势能的概念。

我们可以把质点的运动看成是相对于 ρ 轴的直线运动，运动方程是$\rho(t)$，而 ρ 轴又在轨道平面内按规律 $\varphi(t)$ 转动。将动量矩积分式(4.27)和能量积分式(4.28)联立起来，消去变量 $\dot{\varphi}$ 就得到此直线运动应该满足的方程

$$\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2+[V(\rho)+G^2/2m\rho^2]=E。$$

将此式与 4-6 中所讨论的保守力作用下质点一维运动的能量积分$\frac{1}{2}mv^2+V(x)=E$ 相比较，可以这样看，ρ 相当于 x，$V(\rho)+G^2/2m\rho^2$ 相当于势能 $V(x)$。令

$$U(\rho)=V(\rho)+G^2/2m\rho^2,$$

并称$U(\rho)$为有效势能，它是真实势能$V(\rho)$和所谓“离心势能”① $G^2/2m\rho^2$ 之和。在这样一种对比下，就可以把上节讨论的结果照搬过来，这就是我们之所以要引入有效势能的理由。

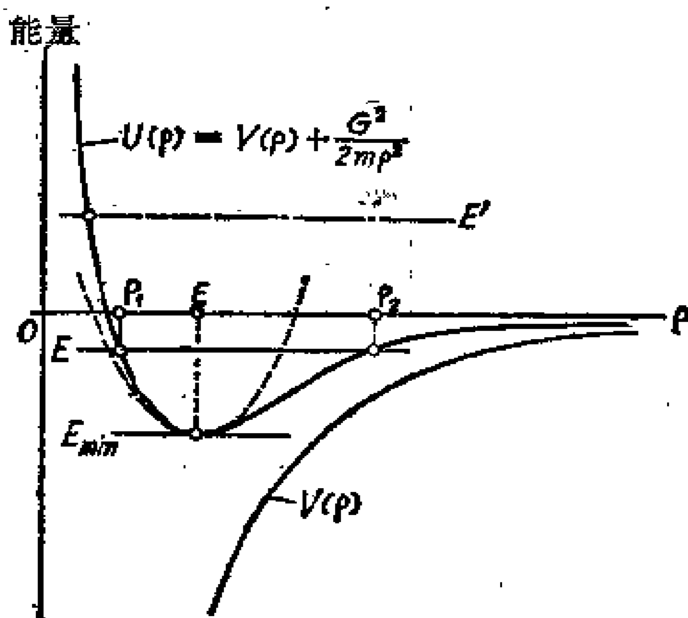


图4.33　有效势能曲线

设有效势能曲线 $U(\rho)$ 如图 4.33 所示。我们只考虑 $G\neq0$的情况，因为 $G=0$ 代表经过力心的直线运动。设 $\rho=\xi$ 是 $dU/d\rho=0$ 的根，即 ξ 满足方程

① 关于离心势能的概念详见8-2。

$$-F(\xi)-\frac{G^2}{m\xi^3}=0,$$

那么 $\rho=\xi$，$\dot{\varphi}=G/m\xi^2$ 是质点运动的一组特解。因为 $\rho=$常量，$\dot{\varphi}=$常量($\neq 0$)，所以这组特解对应于等速圆周运动，此时质点的总机械能是 E_{min}。如果质点在径向受到微小扰动时，质点总是在这个圆形轨道附近运动而不会远离，我们就说这个圆形轨道是稳定的，即对于变量 ρ 来说，它只是在 $\rho=\xi$ 附近变化。所以这个圆形轨道的稳定性取决于 $d^2U/d\rho^2$ 在 $\rho=\xi$ 时的正负号，如果这个二阶导数值大于零，则圆形轨道是稳定的。根据 4-6 中的定理，质点在圆形轨道附近（即 $\rho=\xi$ 附近）微幅振动的频率是

$$\omega=\sqrt{U''(\xi)/m}.$$

这个结果是把 $\rho=\xi$ 邻近的 $U(\rho)$ 曲线用抛物线(图4.33中的虚线)来代替时得到的。

设质点沿 $\rho=\xi$ 作圆周运动(能量 $E=E_{min}$) 时，受到径向的冲击而有一个径向的速度分量，于是质点的能量 E 将大于 E_{min}，但因为动量矩 G 和原来一样，所以 $U(\rho)$ 曲线不变。设此时水平线 E 与曲线 $U(\rho)$ 在 $\rho=\rho_1$ 和 $\rho=\rho_2$ 处相交（试与图4.30对比），因为 $\frac{1}{2}m\dot{\rho}^2$ 不能小于零，这就限制了 ρ 只能在 $\rho_1\leqslant\rho\leqslant\rho_2$ 内变化，相应的质点轨迹的可能情形如图4.34(a)或(b)所示。我们来计算质点由远心点 M_0（对应于 $\rho=\rho_2$）到近心点 M_1（对应于 $\rho=\rho_1$）所需的时间，它是

$$\Delta t^{①}=\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{\rho_1}^{\rho_2}\frac{d\rho}{\sqrt{E-U(\rho)}}.$$

在这段时间内，向径转过的角度 $\angle M_0OM_1$ 等于

$$\Delta\varphi=\sqrt{\frac{G^2}{2m}}\int_{\rho_1}^{\rho_2}\frac{d\rho}{\rho^2\sqrt{E-U(\rho)}}. \qquad (4.33)$$

---

① 如果 ρ_1，ρ_2 和 ξ 相差极微，此时 Δt 就是微幅振动的半周期，即

$$\Delta t\approx\pi/\omega=\pi\sqrt{m/U''(\xi)}.$$

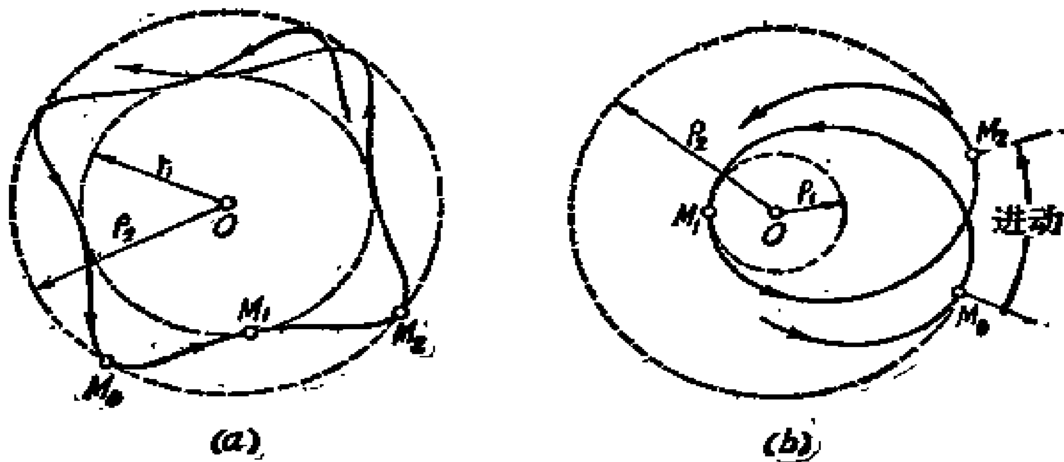


图4.34 ρ值有界的轨道

如果这个角刚好等于 π，那么当质点到达下一个远心点 M_2 时将与 M_0 重合，于是轨道是封闭曲线，沿此轨道运行一周的时间为 $2\Delta t$。如果 $\Delta\varphi$ 接近 π，但不等于 π，则在绕一圈以后远心点将进动一个角度 $\angle M_0OM_2=2(\Delta\varphi-\pi)$，轨道曲线不封闭。对于这种运动，我们可以这样设想：假定质点是在一条平面封闭轨道上运动，同时轨道平面本身又以一定的转速，绕通过力心并垂直于平面的轴转动，这种复合运动的结果就是质点的真实运动（图4.35，图中 $\Delta\varphi<\pi$，这是"负"进动的情况）。

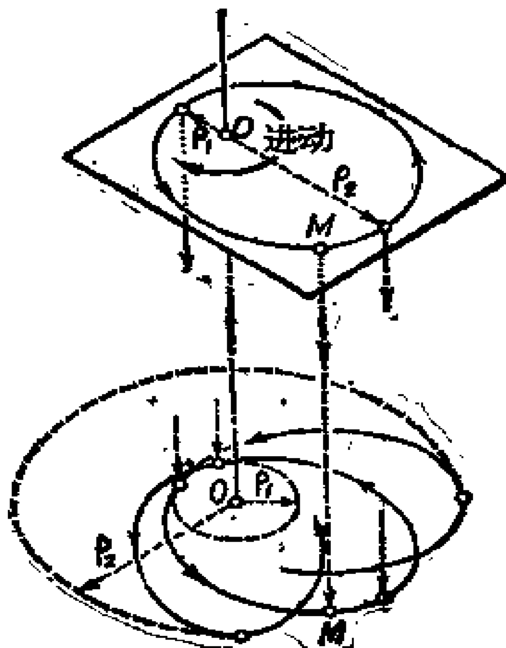


图4.35 轨道平面的进动

如果质点的能量 E' 足够大，则方程 $U(\rho)=E'$ 只可能有一个正根 ρ_1（图4.33）。在这种情况中，ρ 的变化只受 $\rho\geqslant\rho_1$ 的限制，对应的质点轨道将

延伸到无穷远处，它不再是有界的，更不可能是沿封闭轨道的周期运动。

例4.23 小球质量为 m，在光滑水平面上用弹簧与固定点相连（图4.36）。已知弹簧原长为 a，弹簧系数为 k，小球以匀速沿半径为 $\xi(>a)$ 的圆周运动。在径向对它作一个很小的冲击，求径向微幅振动的频率。

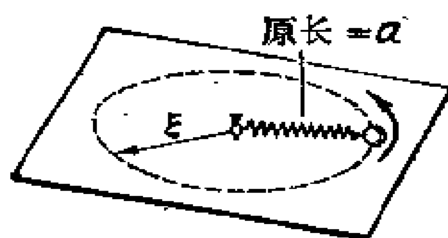


图4.36 求振动频率

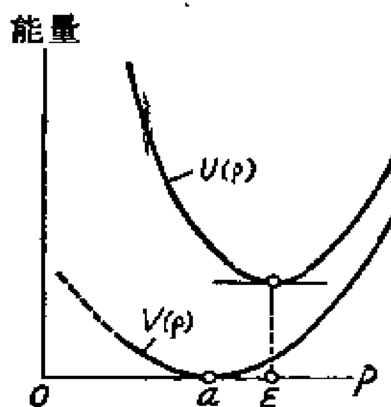


图4.37 势能 $V(\rho)$ 和有效势能 $U(\rho)$

解 小球所受的合力是有心力，它的径向投影是，$F(\rho)=-k(\rho-a)$，负号代表当 $\rho>a$ 时这个力指向圆心。所以势能为

$$V(\rho)=\frac{1}{2}k(\rho-a)^2.$$

动量矩为

$$G=mu\xi,$$

其中 u 是小球绕圆周运动的速度，它可由牛顿第二定律求出。因为

$$m\frac{u^2}{\xi}=k(\xi-a),$$

即

$$u^2=k\xi(\xi-a)/m.$$

于是有效势能为

$$U(\rho)=V(\rho)+\frac{G^2}{2m\rho^2}=\frac{1}{2}k(\rho-a)^2+\frac{k\xi^3(\xi-a)}{2\rho^2}.$$

它的曲线如图4.37所示。点在受到冲击后所作的微幅振动频率为

$$\omega=\sqrt{U''(\xi)/m}=\sqrt{\frac{k}{m}\left(4-3\frac{a}{\xi}\right)}.$$

由于 $\xi>a$，这个频率高于质量弹簧系统的固有频率 $\sqrt{k/m}$。 ▌

例4.24 设有心力大小由幂律给出，即 $F(\rho)=-k\rho^n$（$k>0$时为引力，$k<0$ 时为斥力）。分析圆形轨道是否存在？如存在是否稳定？

解 势能为

$$V(\rho)=\frac{k}{n+1}\rho^{n+1}.$$

设动量矩为 G，于是有效势能为

$$U(\rho)=\frac{k}{n+1}\rho^{n+1}+\frac{G^2}{2m\rho^2}.$$

对 ρ 求一次及二次导数得

$$U'(\rho)=k\rho^n-\frac{G^2}{m}\rho^{-3}=\rho^{-3}\left(k\rho^{n+3}-\frac{G^2}{m}\right),$$

$$U''(\rho)=\rho^{-4}\left(kn\rho^{n+3}+3\frac{G^2}{m}\right).$$

圆形轨道的半径 ξ 由 $U'(\xi)=0$ 的正根给出，即满足

$$k\xi^{n+3}=G^2/m.$$

如果 k 是负的，上面的方程沒有正实根，就是说当有心力是斥力时，质点不可能作圆周运动[①]。

如果 k 是正的，那么在 $n\neq-3$ 时，上述方程总有一个正根

$$\xi=\left(\frac{G^2}{mk}\right)^{\frac{1}{n+3}}.$$

将此值代入 U'' 的表达式，得

$$U''(\xi)=\frac{G^2}{m\xi^4}(n+3).$$

当 $n>-3$ 时，$U''(\xi)>0$，所以半径为 ξ 的圆周轨道是稳定的。万有引力的情况是 $n=-2$，为这种情况的一种特例。当 $n<-3$

① 从物理意义说这是显然的，因为质点作匀速圆周运动时受到的是向心力。

时，虽然存在圆形轨道，但因 $U''(\xi)<0$，所以这种圆周轨道是不稳定的。∎

开普勒问题

求质点在万有引力作用下的运动轨道问题，习惯上叫做开普勒问题。它对于研究行星、慧星以及人造地球卫星、人造天体的运动有很大的实用价值。

设有心力的径向投影为 $F(\rho)=-k/\rho^2$ $(k>0)$，代入比内方程(4.32)，得

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{mk}{G^2},$$

其中 $u=1/\rho$。可见它是一个线性微分方程，它的通解为

$$u=A\cos(\varphi-\varphi_0)+mk/G^2 \tag{4.34}$$

其中 A 和 φ_0 是积分常数。这就是万有引力作用下质点的最一般形式的轨道方程。

由式(4.27)得 $\dot{\varphi}=G/m\rho^2$，由式(4.34)得

$$d\rho/d\varphi=\rho^2 A\sin(\varphi-\varphi_0),$$

并和 $V(\rho)=-k/\rho$ 同时代入(4.28)，得

$$E=\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2)-\frac{k}{\rho},$$

或

$$E=\frac{1}{2}m\left(\frac{G}{m\rho^2}\right)^2\left[\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2+\rho^2\right]-\frac{k}{\rho},$$

将式(4.34)和 $d\rho/d\varphi=\rho^2 A\sin(\varphi-\varphi_0)$ 代入，得

$$E=\frac{G^2A^2}{2m}-\frac{mk^2}{2G^2}.$$

由此解出

$$A=\pm\frac{mk}{G^2}\sqrt{1+\frac{2G^2E}{mk^2}}.$$

令 $e=\sqrt{1+\frac{2G^2E}{mk^2}}\geqslant 0$，则式(4.34)可以写成

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos(\varphi-\varphi_0)},\tag{4.35}$$

其中 $p=G^2/mk$。

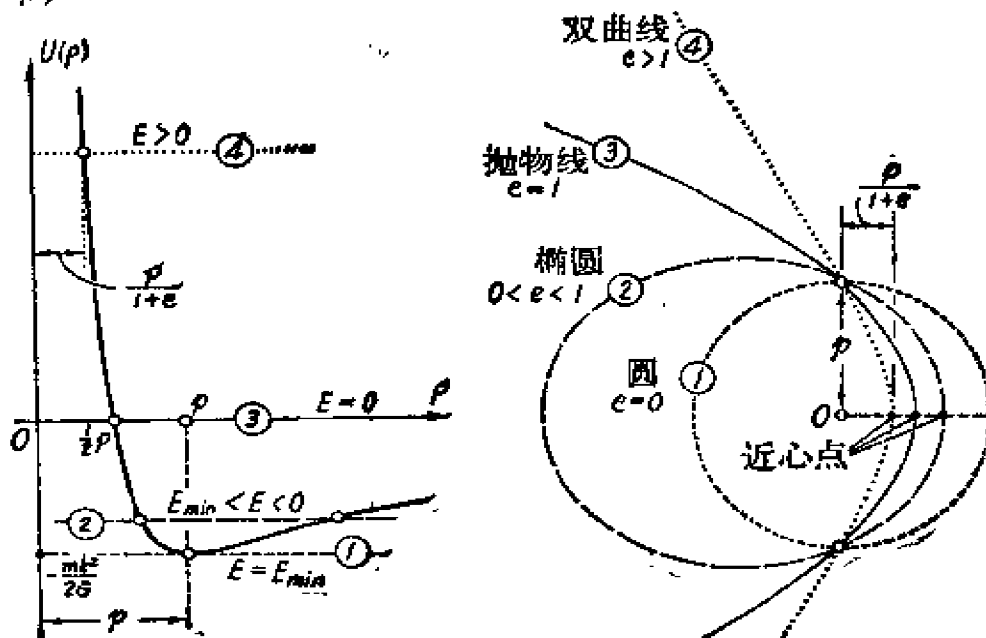
当 $\varphi=\varphi_0$ 时，$\rho=p/(1+e)$ 是 ρ 的极小值，它对应于轨道上的近心点。为了方便起见，我们不妨取力心至近心点的连线为极坐标的极轴方向，那么 $\varphi_0=0$，轨道方程(4.35)就可以简写成

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos\varphi}.\tag{4.36}$$

*** 将 $V(\rho)=-k/\rho$ 代入(4.29)式，并将近心点取为 (ρ_0,φ_0)，通过直接积分求出轨道方程(4.35)。***

式(4.36)是圆锥曲线的极坐标方程，力心 O 是它的一个焦点，e 是偏心率，p 是焦点参数。已知动量矩 $G(\neq 0)$ 和能量 E 时，质点的运动轨道可能有四种情况：

(1) $E=-mk^2/2G^2$，此时 $e=0$，对应于圆形轨道，圆半径 $\rho=p$；



偏心率 $e=\sqrt{1+\frac{2EG^2}{mk^2}}$，焦点参数 $p=\frac{G^2}{mk}$

图4.38 万有引力作用下同一 G 值（不为零），不同 E 值的四种可能的轨道

(2) $-mk^2/2G^2<E<0$，此时 $0<e<1$，对应于椭圆形轨道；

(3) $E=0$，此时 $e=1$，对应于抛物线轨道；

(4) $E>0$，此时 $e>1$，对应于双曲线轨道。

例如，设 G 为定值($\neq 0$)，E 取不同值时，四种可能的情况如图4.38所示。图中在四条轨道上 $\rho=p$ 的两点处，质点速度的横向分量的大小都是 G/mp，但径向分量的大小不同，径向分量越大，能量 E 越大。

再以发射地球卫星为例，如果将进入轨道的那个点叫做初始点，它的向径为 $\rho=R$（略大于地球半径），假定此时卫星的速度大小为 v_0，方向与向径垂直，那么动量矩为

$$G=m\rho^2\dot{\varphi}=mRv_0,$$

机械能为

$$E=\frac{1}{2}mv^2-\frac{k}{\rho}=\frac{1}{2}mv_0{}^2-mgR.$$

其中 $k=mgR^2$，g 是初始点处的重力加速度，略小于9.8米/秒²。椭圆轨道与双曲线轨道的分界点是 $E=0$，由此算出 $v_0=\sqrt{2gR}$，这就是第二宇宙速度。形成圆形轨道的条件是

$$E=-mk^2/2G^2.$$

将 G, E 和 k 的关系代入，可解出 $v_0=\sqrt{gR}$，这就是第一宇宙速度。

* * *　试勾划出不同 v_0 值时几种轨道（起始点相同，v_0 都垂直于起始向径）的草图。* * *

现在我们求开普勒问题椭圆运动的周期。面积速度是 $\rho^2\dot{\varphi}/2=G/2m$，整个椭圆的面积是 πab，其中 a 与 b 是椭圆的半长轴与半短轴，所以向径扫过整个椭圆面积所需的时间就是周期，即

$$T=2\pi mab/G.$$

由解析几何可知，a 与 b 的关系是 $b^2=pa$。代入上式并利用 $p=G^2/mk$，化简后得到

$$T^2=\frac{4\pi^2m}{k}a^3.$$

这说明周期平方与椭圆半长轴立方成正比。这就是开普勒关于行星运动的第三定律。在这里我们是先有牛顿运动定律和万有引力定律，而后用数学演绎方法推导出开普勒第三定律的。在历史上恰好相反，是先有开普勒定律，正是有了它，牛顿才得出万有引力定律，而开普勒定律本身，则是根据长期天文观测的数据归纳出来的。图 4.39 给出了太阳系中各行星半长轴 a 与周期 T 的

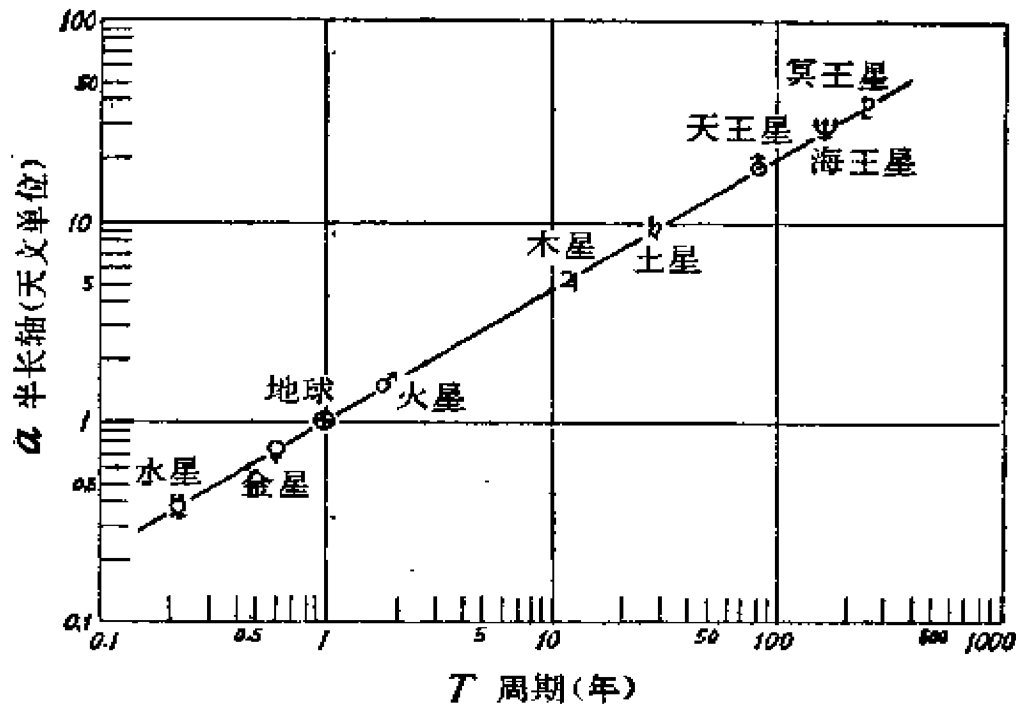


图4.39 周期与半长轴的关系

数据（纵横都用对数坐标）。图中各点在一直线上，直线的斜率是2/3。这说明 $\lg a=\frac{2}{3}\lg T+$常量，即 T^2 与 a^3 成比例。

例4.25 远程抛射体 设在地球表面以很大的速度 v_0 射出一物体，速度的方向与水平面（地球的切平面）夹角为 α。不计空气阻力，不计地球自转的影响。求物体的最大高度 H 和射程 L。

解 假定 $v_0<\sqrt{2gR}$，否则物体将逃脱地球，这里 R 是地球

半径。

引力比例系数 $k=mgR^2$，由初条件可以定出动量矩 G 和能量 E：

$$G=mRv_0\cos\alpha,$$

$$E=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{k}{R}=\frac{1}{2}m(v_0^2-2gR)<0.$$

由此可以算出圆锥曲线参数 p 和 e：

$$p=\frac{G^2}{mk}=2R\left(\frac{v_0}{c}\right)^2\cos^2\alpha,$$

$$e=\sqrt{1+\frac{2EG^2}{mk^2}}=\sqrt{1-4\left(\frac{v_0}{c}\right)^2\left(1-\frac{v_0^2}{c^2}\right)\cos^2\alpha},$$

其中 $c=\sqrt{2gR}$，是第二宇宙速度。令 $\beta=v_0/c<1$。则有

$$p=2R\beta^2\cos^2\alpha,$$
$$e=[1-4\beta^2(1-\beta^2)\cos^2\alpha]^{\frac{1}{2}}.$$

由 e 的表达式中看出 $e<1$，另外 $\beta^2(1-\beta^2)\cos^2\alpha$ 的最大值为1/4，这只出现在 $\beta=1/\sqrt{2}$（对应于 $v_0=\sqrt{gR}$）以及 $\alpha=0$ 的情况下，除此以外，必有 $e>0$。所以，一般地说抛射体的轨道是椭圆（图4.40），地心是它的一个焦点。椭圆的远地点距离是

$$\rho=p/(1-e),$$

因此最高点 B 离地面的距离是

$$H=p/(1-e)-R.$$

将 p 与 e 代入并化简后得

$$H=\frac{p(1+e)}{1-e^2}-R$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(e-1)+\beta^2}{1-\beta^2}\cdot R.$$

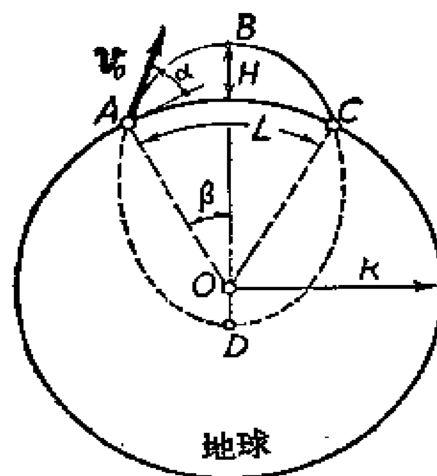


图4.40　抛射体轨道

发射点 A 的坐标：$\rho=R$，

$\varphi=\pi-\beta$(φ 自近心点 D 算起)。将它们代入轨道方程

$$\rho=p/(1+e\cos\varphi)_{\circ}$$

可以从中解出

$$\beta=\arccos\left[\frac{1}{e}\left(1-\frac{p}{R}\right)\right].$$

射程 L 就是地面上 2β 角所张的弧长，所以

$$L=2R\beta=2R\arccos\left[\frac{1}{e}\left(1-\frac{p}{R}\right)\right]$$

$$=2R\arcsin\left[\frac{1}{e}\sqrt{e^{2}-\left(1-\frac{p}{R}\right)^{2}}\right]$$

$$=2R\arcsin\left[\frac{1}{e}\beta^{2}\sin 2\alpha\right].$$

当 $\beta=v_0/c\ll1$时，可将 H 和 L 的表达式按 β 的幂次展开，并略去高阶小量，得

$$H=v_0^2\sin^2\alpha/2g,\quad L=v_0^2\sin 2\alpha/g.$$

这两个式子就是把地面看成是平面，重力均匀不变时抛射体的高度和射程，它们是本问题的一次近似值。 ▎

例4.26 第三宇宙速度 从地球上发射的火箭能够脱离太阳系时，火箭所具有的相对于地球的最小速度叫做第三宇宙速度。已知太阳质量 $M_s=1.989\times10^{33}$ 克，万有引力常数 $\gamma=6.672\times10^{-8}$ 厘米^3/(克·秒^2)，地球轨道半径 $\rho_e=1.495\times10^{13}$ 厘米，地球质量 $M_e=5.976\times10^{27}$ 克，地球半径 $R_e=6.367\times10^{8}$ 厘米。求第三宇宙速度。

解 设地球绕太阳的公转速度为 v_e，则由

$$M_e\frac{v_e^2}{\rho_e}=\gamma\frac{M_sM_e}{\rho_e^2},$$

得
$$v_e=\sqrt{\gamma M_s/\rho_e}=2.979\times10^{6}\text{厘米/秒}$$

现设想在地球公转轨道上发射一火箭，则这枚火箭能脱离太阳系时所具有的速度为 $v_0=\sqrt{2}\,v_e=4.213\times10^{6}$ 厘米/秒（见习题4.41）。现在我们的火箭是在地球上发射的，这就要求这枚火

箭在脱离地球的引力以后，相对于太阳的速度至少为v_0时才能脱离太阳系，那么它相对于地球的速度就是$\boldsymbol{v}_0-\boldsymbol{v}_e$（注意我们用了向量写法）。在离开地球无穷远处这枚火箭的总能量为$\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_0-\boldsymbol{v}_e|^2$，$m$是火箭的质量。设第三宇宙速度为$v_3$，则由机械能守恒，得

$$\frac{1}{2}mv_3^2-\gamma\frac{M_e m}{R_e}=\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_0-\boldsymbol{v}_e|^2,$$

即

$$v_3^2=2\gamma M_e/R_e+|\boldsymbol{v}_0-\boldsymbol{v}_e|^2.$$

显然，当$\boldsymbol{v}_0$与$\boldsymbol{v}_e$的方向相同时，v_3取最小值，所以

$$v_3^2=2\gamma M_e/R_e+(v_0-v_e)^2.$$

代入数据后得$v_3\doteq1.665\times10^6$厘米/秒≈16.7公里/秒。

从以上推导过程中应该注意两点：第三宇宙速度是相对于地球的速度；它的方向应该和地球公转速度的方向一致。当然这只是不考虑空气阻力的理想情况，实际情况要复杂得多。▌

例4.27 水星近日点的进动 从开普勒问题的讨论中知道，对于与距离平方成反比的引力来说，如果轨道有界，那么就是椭圆。但是长期观察水星的轨道发现，它的轨道既有界而又不是严格的椭圆（图4.41）。它的近日点（远日点也一样）有缓慢的运动，观察的数据是每百年进动约574″（角秒），在扣除由于其他行星的影响531″后，还相差每百年43″。这个差额直到广义相对论提出以后才得到了圆满的解释。根据广义相对论引力理论的结果，相当于在万有引力上还要加上一个与ρ^4成

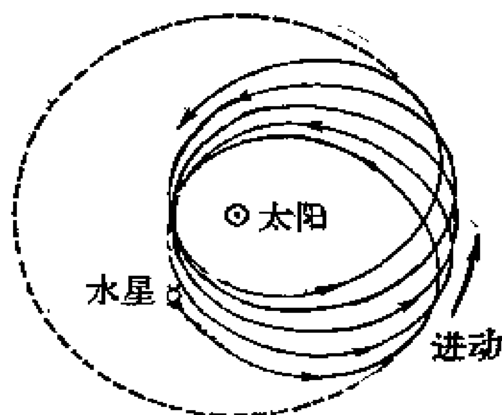


图4.41 水星轨道示意图

反比的小量。所以可以认为水星受到太阳的引力是

$$F(\rho)=-\gamma\frac{mM}{\rho^2}-3\gamma\frac{MG^2}{mc^2\rho^4},$$

其中 γ 是万有引力常数，m 和 M 分别是水星和太阳的质量，G 是水星相对太阳的动量矩，c 是光速。现在考虑在这个“折合”的引力作用下水星近日点的进动问题。令 $k=\gamma mM$，则水星的势能为

$$V(\rho)=-\frac{k}{\rho}-\frac{kG^2}{c^2m^2\rho^3}.$$

有效势能为

$$U(\rho)=-\frac{k}{\rho}+\frac{G^2}{2m\rho^2}-\frac{kG^2}{c^2m^2\rho^3}.$$

代入式(4.33)，得

$$\Delta\varphi=\sqrt{\frac{G^2}{2m}}\int_{\rho_1}^{\rho_2}\frac{d\rho}{\rho^2\sqrt{E+\frac{k}{\rho}-\frac{G^2}{2m\rho^2}+\frac{kG^2}{c^2m^2\rho^3}}},$$

其中 ρ_1 和 ρ_2 是分母中根式的两个正根，即分别是近日点和远日点的距离。因此，相继两个近日点的夹角为 $2(\Delta\varphi-\pi)$。下面对 $\Delta\varphi$ 的积分式作近似计算。引入新变量 $u=1/\rho$，以上积分写成

$$\Delta\varphi=\int_{u_2}^{u_1}\frac{du}{\sqrt{A+Bu-u^2+\lambda u^3}},$$

其中 $A=2Em/G^2$，$B=2km/G^2$，$\lambda=2k/mc^2$。

这里 λ 是一个小量。先把 c 当作无穷大来处理，则 $\lambda=0$，积分式为

$$\Delta\varphi=\int_{u_2}^{u_1}\frac{du}{\sqrt{A+Bu-u^2}},$$

其中 u_1,u_2 是 $A+Bu-u^2=0$ 的两个正根。因 $u_1>u_2$，所以积分式为

$$\Delta\varphi=\int_{u_2}^{u_1}\frac{du}{\sqrt{-(u_1-u)(u_2-u)}}$$

$$=\left[\arc\sin\frac{u-\frac{1}{2}(u_1+u_2)}{\frac{1}{2}(u_1-u_2)}\right]_{u_2}^{u_1}=\pi.$$

这就是封闭的椭圆轨道的情形(图4.42)。$1/u_1$ 是近日点距离，$1/u_2$ 是远日点距离。所以有关系式

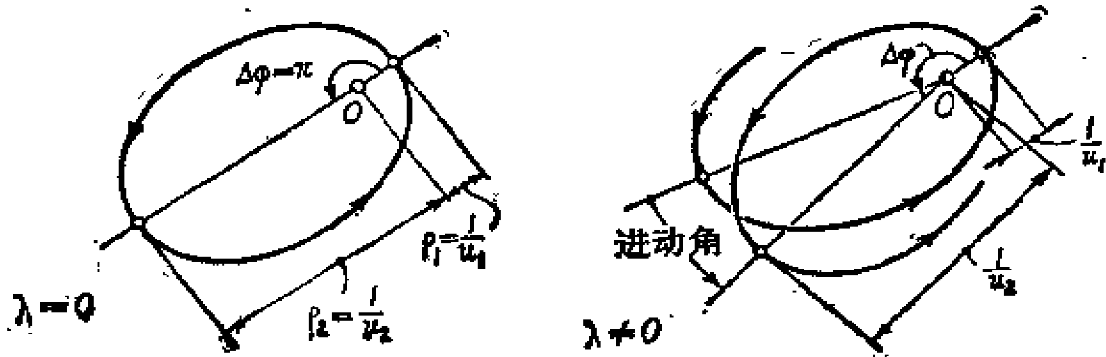


图4.42　近日点进动

$$u_1=\frac{1}{a(1-e)},\quad u_2=\frac{1}{a(1+e)},$$

其中 a 为椭圆的半长轴，e 为偏心率。

现在考虑 λ 不等于零但很小的情况(图4.42)。此时 $A+Bu-u^2+\lambda u^3=0$ 有三个根，即 u_1,u_2 和 u_3，其中 u_1 和 u_2 可以认为与 $\lambda=0$ 时的 u_1 和 u_2 相差不多，我们仍然把 u_1 和 u_2 取为 $1/a(1-e)$ 和$1/a(1+e)$。因为三根之和为 $1/\lambda$，所以有

$$u_3=\frac{1}{\lambda}-(u_1+u_2)=\frac{1}{\lambda}[1-\lambda(u_1+u_2)].$$

原多项式可以改写成

$$A+Bu-u^2+\lambda u^3=\lambda(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)$$

$$=\lambda(u-u_1)(u-u_2)\left\{u-\frac{1}{\lambda}[1-\lambda(u_1+u_2)]\right\}$$

$$=(u_1-u)(u-u_2)[1-\lambda(u_1+u_2)]\left[1-\frac{\lambda u}{1-\lambda(u_1+u_2)}\right].$$

因为 λu 和 $\lambda(u_1+u_2)$ 都是小量，作为一阶近似，我们取

$$\frac{1}{\sqrt{A+Bu-u^2+\lambda u^3}}=\frac{1}{\sqrt{(u_1-u)(u-u_2)}}\left[1+\frac{\lambda}{2}(u_1+u_2)\right]\left(1+\frac{1}{2}\lambda u\right).$$

由此可以算得

$$\Delta\varphi=\int_{u_2}^{u_1}\frac{du}{\sqrt{A+Bu-u^2+\lambda u^3}}=\pi\left[1+\frac{3}{4}\lambda(u_1+u_2)\right].$$

这就是近日点向径与远日点向径的张角。因此在绕轨道一周后，近日点（或远日点）的进动角为

$$2(\Delta\varphi-\pi)=\frac{3}{2}\pi\lambda(u_1+u_2).$$

以 $u_1=1/a(1-e)$，$u_2=1/a(1+e)$，$\lambda=2k/mc^2$ 及 $k=\gamma Mm$ 代入，得

$$\text{每圈进动角}=\frac{6\pi\gamma M}{ac^2(1-e^2)}.$$

将下列数据（γ 和 M 的数据见例 4.26）

光速 $c=2.998\times10^{10}$ 厘米/秒；

水星轨道数据：$a=5.786\times10^{12}$ 厘米，$e=0.2056$

代入上式最后得出

$$\text{每圈进动角}=5.022\times10^{-7}\text{ 弧度}.$$

水星的周期是 87.969 天，即 100 年（1 年＝365.256 天）转动 415.21 圈。所以在一百年中进动角为 2.085×10^{-4} 弧度，即 43.01 秒，与观测值 43 秒基本上一致。▌

4-8　有约束时的运动

在静力学(1-6)中已讲过约束和约束力。我们把限制质点作自由运动的条件叫做约束。如果质点在运动过程中受到某种约束，这种运动称为**约束运动**，或非自由运动。例如，用一根刚性

杆将质点与固定点连接，并限制它只能在 x-y 平面内运动，这就是通常所说的单摆。对质点的约束可用下列方程表示：

$$x^2+y^2=l^2; \quad z=0,$$

其中 l 是摆长。又如被限制在球面上运动的质点，其约束条件是

$$x^2+y^2+z^2=R^2,$$

其中 R 是球半径。也可以用其他坐标系表示约束条件。比如用球坐标时，上述的约束条件就是

$$r=R。$$

约束条件可以由不等式给出，例如上述单摆改用柔绳与固定点连接时，约束条件应写成

$$x^2+y^2\leqslant l^2; \quad z=0。$$

约束条件中还可能显含时间 t（直接在方程中出现时间 t）。例如，如果上述单摆中的柔绳以等速率 u 随时间缩短，则约束方程应写成

$$x^2+y^2\leqslant (l_0-ut)^2; \quad z=0,$$

其中 l_0 是绳子的初始长度。

一般说来，质点的约束条件可用下列约束方程表示

$$f(x,y,z;t)=0^{①},$$

或
$$f(x,y,z;t)\geqslant 0。$$

前一种用等式表示的称为**双面约束**，后一种用不等式表示的称为**单面约束**。约束方程中显含时间 t 的称为**非定常约束**；反之，不显含时间 t 的称为**定常约束**②。

一个自由质点的运动，要用三个独立变量 x,y 和 z 来描述，称为三维运动，或者说质点有三个自由度。如果存在一个约束方程

$$f(x,y,z)=0,$$

---

① 约束方程也可以用其他曲线坐标系表示。在本节下面的讨论中，如不加说明即指直角坐标系。关于约束方程中包含速度变量 $\dot{x},\dot{y},\dot{z}$ 的情况，将在10-8中讨论。

② 有的书上称为“不稳定约束”与“稳定约束”。

那么可以通过它将一个变量比如是 z，表成另外两个变量 x 和 y 的函数，因此独立的变量只有两个。此时质点的运动是二维运动或者说质点有两个自由度。从几何上看，方程 $f=0$ 表示空间中的一个曲面，所以具有一个约束条件的运动，实际上是约束在一个曲面上的运动。同理，如果存在两个互相独立的约束方程

$$f_1(x,y,z)=0, \quad f_2(x,y,z)=0,$$

则必能通过它们将其中两个变量分别表成第三个变量的函数。于是运动是一维的，质点有一个自由度。$f_1=0$ 和 $f_2=0$ 分别代表两个曲面，因此质点必定被约束在这两个曲面的交线上运动。例如，单摆的约束条件

$$x^2+y^2+z^2=l^2$$

是一个球面，另一个约束条件 $z=0$ 是一个平面，这两个曲面的交线是一圆周，因此单摆的运动是一维的圆周运动。

我们在 4-2 中说过，动力学问题主要是已知力求运动的问题，这个已知力一般地是指主动力。“已知力”有两重含义：(1) 力的大小和方向是已知的，如重力等；(2) 力的大小和方向与质点运动的某些瞬时量有关，如万有引力和弹簧力由质点的瞬时位置决定，粘性阻力由质点的瞬时速度决定。总之，主动力与约束条件无关，它们不管所研究的运动要服从什么样的微分方程，也不管除了它们以外还有没有别的力存在，它们的变化规律是已知的。而在约束运动中，为了强制质点满足约束条件，约束物体必然对质点施加约束力。约束力与主动力不一样，一般说来它的大小和方向是未知的，它既与约束条件有关，又与质点的运动情况有关，必须通过动力学方程才能确定。例如，当火车被约束在弯曲的铁轨上运动时，铁轨对火车的作用力就是约束力，它既与铁轨的形状有关，又与火车的运动速度有关。要知道约束力就需要知道运动，而为了要求运动又需要知道包括约束力在内的外力。因此，约束力与运动将一起作为未知量出现在动力学方程中。

如果我们考虑质点被约束在光滑的曲面或曲线上运动，则约

束力将沿着约束曲面或曲线的法线方向，这种约束称为理想约束①。

下面考虑质点沿着固定曲线的运动。设约束是理想的，约束条件为

$$f_1(x,y,z)=0,\quad f_2(x,y,z)=0. \tag{4.37}$$

质点的运动微分方程为

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{N}, \tag{4.38}$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 是主动力，$\boldsymbol{N}$ 是约束力。因为约束是理想的，所以约束力应该既与曲面 $f_1=0$ 垂直，又与曲面 $f_2=0$ 垂直。设 $\boldsymbol{n}_1^0$ 和 $\boldsymbol{n}_2^0$ 分别是这两个曲面的法向单位向量，那么可以把约束力 $\boldsymbol{N}$ 在这两个方向上分解(图4.43)，有关系式

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{N}_1+\boldsymbol{N}_2=N_1\boldsymbol{n}_1^0+N_2\boldsymbol{n}_2^0.$$

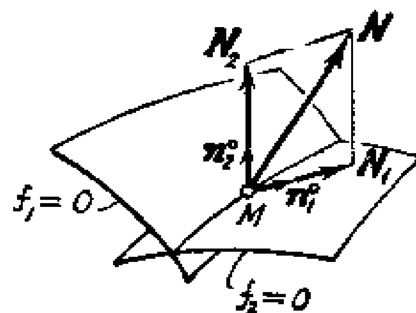


图4.43 约束力的分解

因为向量

$$\text{grad}\, f_1=\frac{\partial f_1}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

的方向就是 $\boldsymbol{n}_1^0$ 的方向，故 $\boldsymbol{N}_1$ 可写成

$$\boldsymbol{N}_1=\lambda_1\,\text{grad}\, f_1;$$

同理有

$$\boldsymbol{N}_2=\lambda_2\,\text{grad}\, f_2,$$

其中 λ_1 和 λ_2 是待定的未知量。因此，式(4.38)成为

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F}+\lambda_1\,\text{grad}\, f_1+\lambda_2\,\text{grad}\, f_2.$$

写成分量形式为

---

① 更一般的理想约束将在10-2中论述。

$$
\begin{cases}
m\ddot{x} = F_x + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x}, \\
m\ddot{y} = F_y + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial y}, \\
m\ddot{z} = F_z + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial z}.
\end{cases}
\tag{4.39}
$$

方程(4.39)和约束方程(4.37)联立在一起共有五个方程[①]。在给定初条件（质点的初位置和初速度）以后，就可以解出时间 t 的五个未知函数，即 x,y,z 和 λ_1,λ_2。这样，满足约束条件的运动和约束力就完全被确定了。

对于约束在曲面上的质点来说，约束方程只有一个，即

$$
f(x,y,z)=0. \tag{4.40}
$$

假如约束也是理想的，则与曲线运动情况类似，我们可以得出质点的运动微分方程为

$$
m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F}+\lambda\,\mathrm{grad}\,f \tag{4.41}
$$

其分量形式为

$$
\begin{cases}
m\ddot{x} = F_x + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x}, \\
m\ddot{y} = F_y + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial y}, \\
m\ddot{z} = F_z + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial z}.
\end{cases}
\tag{4.42}
$$

将式(4.42)和(4.40)联立，可以解出以时间 t 为自变量的四个未知函数 x,y,z 及 λ。

---

① 这是一组微分方程和代数方程相混合的方程组，但就微分方程而言，它是六阶的．方程的解将含有六个积分常数，由六个初条件，即三个初位置和三个初速度确定．

在解各种具体问题中，有时应用其他坐标系更为方便。比如约束在球面上的运动利用球坐标或许会方便些。

在理想约束的曲线运动情况下，经常应用本性法(2-1)。将方程(4.38)在曲线的切向 $\boldsymbol{\tau}$，主法向 $\boldsymbol{n}$ 和副法向 $\boldsymbol{b}$ 上(图2.9)分解，得

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt}=F_{\tau}, \\ m\dfrac{v^2}{\rho}=F_n+N_n, \\ 0=F_b+N_b, \end{cases} \tag{4.43}$$

其中第一个方程只与主动力有关，ρ 是曲线的曲率半径。如果所讨论的问题并不需要求出约束力，那么只需要用第一个方程就能求解。比如例 4.9 就是这样做的。

在定常理想约束情况下，并假定主动力 $\boldsymbol{F}$ 是保守力，则应该同时满足条件

$$\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{v}=0,\quad F=-\mathrm{grad}\,V,$$

其中 $V(x,y,z)$ 是主动力对应的势能，$\boldsymbol{v}$ 是质点的速度。

将运动微分方程(4.38)等号两边同时点乘 $\boldsymbol{v}$，左边得

$$m\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right),$$

右边得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{N})\cdot\boldsymbol{v}&=F_xv_x+F_yv_y+F_zv_z\\ &=-\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt}-\frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt}-\frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dt}=-\frac{dV}{dt}.\end{aligned}$$

因此得到

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=-\frac{dV}{dt}.$$

或写成

$$\frac{1}{2}mv^2+V=E(\text{常量})。$$

这说明在定常理想约束且主动力有势的情况下，机械能守恒定理仍然成立。

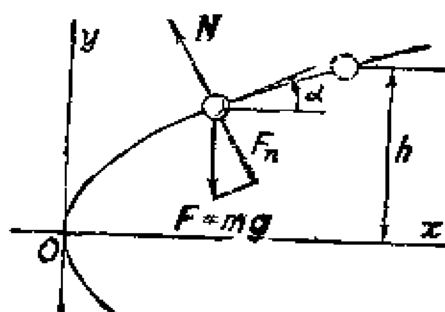


图4.44 求约束力

例4.28 质量为m的小珠串在一光滑的铁丝上，铁丝在竖直平面内且其形状为抛物线(图4.44)：$y^2=2px$。初始时小珠的高度$y=h$，初速为零，求小珠下滑时所受的约束力。

解 应用机械能守恒定理，有

$$v^2=2g(h-y)。$$

因为重力在副法向(垂直于x-y平面)的投影为零，根据式(4.43)中的第三式，必有$N_b=0$，所以$\boldsymbol{N}_n=N_n\boldsymbol{n}$。由第二式得

$$N_n=m\frac{v^2}{\rho}-F_n。$$

抛物线的曲率半径为

$$\rho=\frac{(p+2x)^{3/2}}{\sqrt{p}}=\frac{(p^2+y^2)^{3/2}}{p^2}。$$

重力在主法向上的分量为

$$F_n=mg\cos\alpha=-\frac{mgy}{\sqrt{p^2+y^2}}。$$

最后可得

$$\boldsymbol{N}=\left[\frac{2p^2(h-y)}{(p^2+y^2)^{3/2}}-\frac{y}{(p^2+y^2)^{1/2}}\right]mg\boldsymbol{n}。$$

注意式中主法向$\boldsymbol{n}$是指向曲线凹的一面。 ▎

例4.29 等时摆 质点在重力作用下，沿竖直平面内光滑的旋轮线运动（图4.45)。旋轮线的参数方程为

$$x=R(\varphi+\sin\varphi),\quad y=R(1-\cos\varphi)。\tag{1}$$

求质点在$\varphi=0$左右摆动的周期。

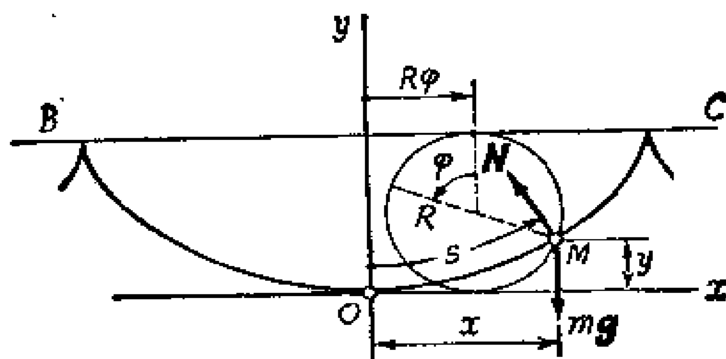


图4.45　旋轮线即摆线

解　因为质点的运动是一维的，故取弧长 s 为变量。设$\varphi=0$时，$s=0$。由方程（1）得

$$dx=R(1+\cos\varphi)d\varphi,\quad dy=R\sin\varphi\, d\varphi。$$

于是

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2=4R^2\cos^2\frac{\varphi}{2}(d\varphi)^2。$$

开方并积分后得

$$s=4R\sin\frac{\varphi}{2}。$$

代入 y 的参数方程，得

$$y=s^2/8R。\tag{2}$$

因此，能量积分为

$$\frac{1}{2}mv^2+mgy=E。$$

将式（2）和 $v=ds/dt$ 代入上式，得

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+mg\frac{s^2}{8R}=E。\tag{3}$$

设质点达到最高点时弧长为 s_0，此时 $v=0$，由此可以确定

$$E=mgs_0^2/(8R)。$$

由式（3）可以算出质点的摆动周期是

$$T=4\int_0^{s_0}\frac{ds}{\sqrt{\frac{2E}{m}-\frac{g}{4R}s^2}}$$

$$=8\sqrt{\frac{R}{g}}\int_0^{s_0}\frac{ds}{\sqrt{s_0^2-s^2}}=4\pi\sqrt{\frac{R}{g}}。$$

由此可见，质点的振动周期与振幅 s_0 无关，这就是等时摆名称的来源，旋轮线也因此又叫摆线。

为了与普通的单摆进行比较，将能量积分式（3）对 t 求一次导数，得等时摆的运动微分方程为

$$m\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{mg}{4R}s=0。\qquad (4)$$

考虑摆长为 $4R$ 的普通单摆，其运动微分方程为

$$m\frac{d^2s}{dt^2}+mg\sin\frac{s}{4R}=0。\qquad (5)$$

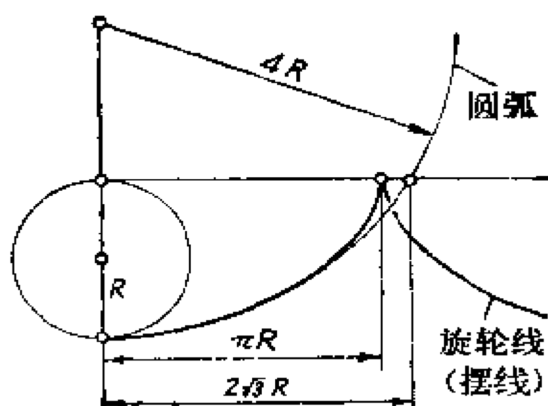


图4.46　等时摆与单摆的比较

当单摆的振幅很小时，方程（5）经线性化后就是方程（4）。因此，普通单摆只有在微振动时才能近似地认为具有等时性。从几何上看，旋轮线在原点处的曲率半径是 $4R$。如以 $(0,4R)$ 这一点为中心，$4R$ 为半径作一圆弧，这个圆是旋轮线的密切圆，在原点附近非常接近于旋轮线（图4.46）。

惠更斯（Huyghens ①C.，1629—1695）提出实现等时摆的一种办法是在单摆悬挂点两旁加上两个夹板（图4.47），夹板的形状取为半个旋轮线。于是可以证明，摆动时点的轨迹就是旋轮线。▌

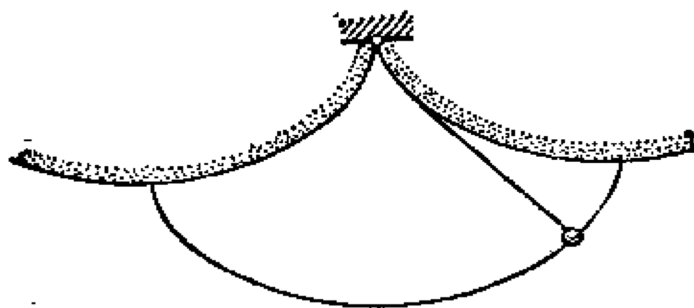


图4.47　等时摆

例4.30　质量为m的小球在光滑旋转抛物面$x^2+y^2=4az$的内壁上运动，z轴竖直向上，a为常量。当小球以匀速沿半径为$2a$的水平圆周运动时，受到一个冲击，使它在沿抛物面子午线切向获得一附加的速度$v_0=\sqrt{ga}$（图4.48）。求证以后小球的运动轨迹将被限制在两个水平面之间。

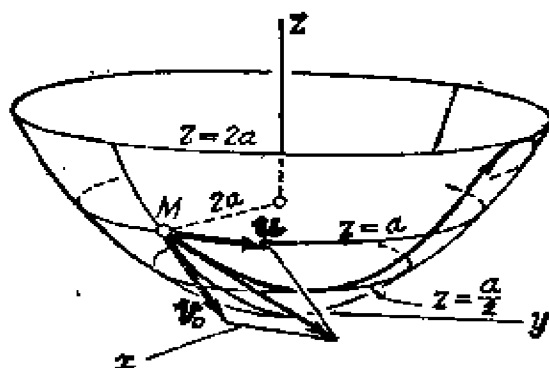


图4.48　约束在旋转抛物面上的运动

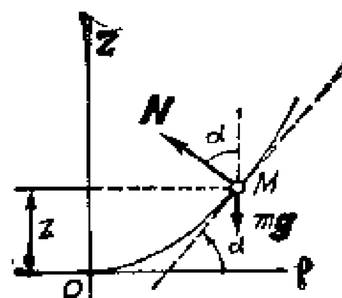


图4.49　受力图

解　选用柱坐标，抛物面的方程为

---

① 读[ˋhaigənz]，“惠”是误译，应为“海”。

$$\rho^2=4az.$$

约束力 N 与 z 轴的夹角(图4.49)为

$$\alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{dz}{d\rho}=\operatorname{arc\,tg}\frac{\rho}{2a}.$$

设受到冲击以前，圆周运动的水平速度为 u，此时半径是 $\rho=2a$，高度 $z=a$，故 $\alpha=\pi/4$。根据 $\sum F_\rho=ma_\rho$，可以得一方程

$$-N\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=-m\frac{u^2}{2a}.$$

根据 $\sum F_z=ma_z$，可以得到另一方程

$$N\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-mg=0.$$

由此解出 $u=\sqrt{2ga}$。此时质点对 z 轴的动量矩为

$$G_z=mu\cdot 2a=2ma\cdot\sqrt{2ga}.$$

质点的总机械能为

$$\frac{1}{2}mu^2+mgz=\frac{1}{2}m\cdot 2ga+mga=2mga.$$

在冲击作用后，质点的动量改变了，但由于冲量与 z 轴相交，故质点在冲击前后对 z 轴的动量矩没有变化，所以仍有

$$G_z=2ma\sqrt{2ga}.$$

然而动能增加了 $\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mga$，于是总机械能变为

$$2mga+\frac{1}{2}mga=\frac{5}{2}mga.$$

由于约束力和重力对 z 轴的矩恒等于零（图4.49），所以在以后的运动中质点对 z 轴的动量矩守恒，即

$$m\rho^2\dot{\varphi}=2ma\sqrt{2ga}. \qquad (1)$$

能量守恒方程为

$$\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)+mgz=\frac{5}{2}mga. \qquad (2)$$

设质点沿子午线的速度为 w，则 $w^2=\dot{\rho}^2+\dot{z}^2$。由式（1）和（2）中消去 $\dot{\varphi}$，并利用 $\rho^2=4az$，可得

$$w^2+\frac{2a^2g}{z}+2gz=5ga.$$

当质点上升到最高点或下降到最低点时，$w=0$，代入上式便得

$$2z^2-5az+2a^2=0.$$

解上述代数方程，得 $z=a/2$ 和 $z=2a$。对于一般的 w，关系式 $a/2\leqslant z\leqslant 2a$ 成立，即质点运动的轨迹被限制在两个水平面 $z=a/2$ 和 $z=2a$ 之间。∎

例4.31 球摆 质量为 m 的重球用长为 l 的轻杆与固定点 O 相连。如果重球不限制在某个竖直平面内，则称为球摆。试分析球摆的运动。

解 取柱坐标，z 轴竖直向下。小球有一个约束方程，即

$$\rho^2+z^2=l^2,$$

所以球摆的运动是二维运动。和上例一样，对 z 轴动量矩守恒，有方程

$$m\rho^2\dot{\varphi}=G_z \text{（常量）}.$$

根据机械能守恒，有方程

$$\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)-mgz=E \text{（常量）}.$$

由上两式消去 $\dot{\varphi}$，并令 $v^2=\dot{\rho}^2+\dot{z}^2$，得

$$v^2+\left(\frac{G_z}{m}\right)^2\cdot\frac{1}{\rho^2}-2gz=\frac{2E}{m}.$$

由约束方程得 $\rho^2=l^2-z^2$，代入上式得

$$v^2+\left(\frac{G_z}{m}\right)^2\cdot\frac{1}{l^2-z^2}-2gz=\frac{2E}{m}.$$

和上例一样，设法寻找最高位置和最低位置，即令 $v=0$，得 z 的一个三次代数方程

$$\Phi(z)=\left(z+\frac{E}{mg}\right)(z+l)(z-l)+\frac{G_z^2}{2m^2g}=0. \quad (1)$$

设初始条件 $z=z_0$，$|z_0|\leqslant l$，沿子午线方向的初速度为 v_0，沿纬度方向的初速度为 u_0，则有

$$E=\frac{m}{2}(u_0^2+v_0^2)-mgz_0,$$

$$G_z=mu_0\sqrt{l^2-z_0^2}.$$

以这些值代入方程(1)中，可得

$$\Phi(z_0)=-\frac{v_0^2}{2g}(l^2-z_0^2)\leqslant 0.$$

另外，有 $\Phi(-\infty)=-\infty,\Phi(-l)>0,\Phi(+l)>0$ 和 $\Phi(+\infty)>0$。这说明方程(1)在 $(-\infty,-l)$ 之间至少有一个负根，这个根没有用。另外两个根要分成两种情况来处理：

(i) 当 $\Phi(z_0)<0$，即初速度沿子午线方向的分量 v_0 不等于零时，在 $(-l,+l)$ 之间有两个实根 z_1 和 z_2，$z_1<z_0<z_2$。当 $z_1>0$ 时，质点运动限制在两个水平面 $z=z_1$ 和 $z=z_2$ 之间(会不会出现 $z_1<0$ 的情况，从物理上看何时实现?)，见图4.50(a)。

(ii) 当 $\Phi(z_0)=0$，即初速度沿纬度方向时，那么 $z=z_0$ 就

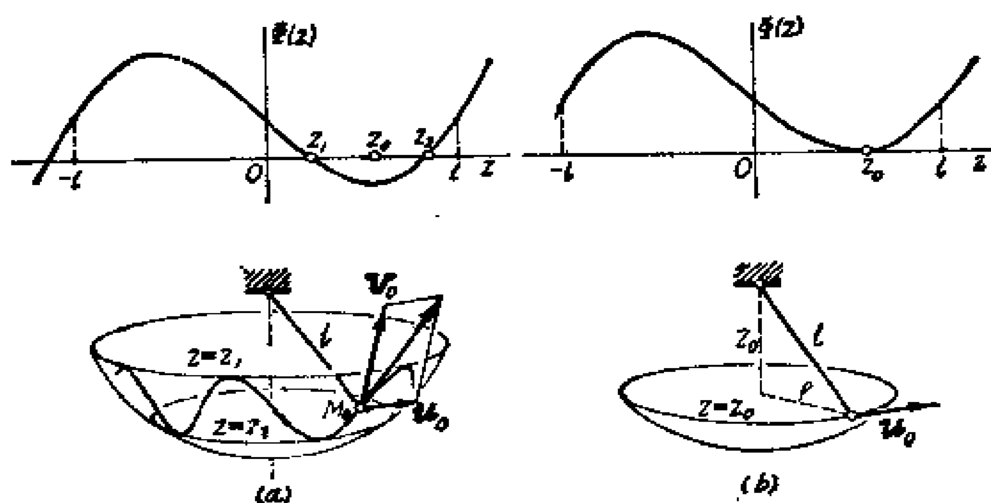


图4.50 球面摆的运动

是其中一个根。如果此时$\Phi'(z_0)=0$同时成立，则 $z=z_0$ 是重根。质点沿一个水平面作圆周运动，成为一个锥摆（如果 $\Phi'(z_0)\neq 0$，将出现什么结果，何时出现？），见图4.50(b)。

使 $\Phi'(z_0)=0$ 的条件是

$$\Phi'(z_0)=\left(z_0+\frac{E}{mg}\right)(2z_0)+(z_0^2-l^2)$$

$$=\frac{u_0^2}{g}z_0+(z_0^2-l^2)=0.$$

由此解得 $u_0=\sqrt{l^2-z_0^2}\cdot\sqrt{\frac{g}{z_0}}=\rho_0\cdot\sqrt{\frac{g}{z_0}}$，其中 ρ_0 是圆轨道半径。▌

例4.32 锥面上的惯性运动 设质点约束在光滑圆锥面上（图4.51），除了约束力外，没有其他力（重力也不计）作用。试分析这种理想的惯性运动。

解 取球坐标(r,θ,φ)，则 $\theta=\alpha$ 就是约束方程，其中 α 是圆锥的半顶角。

因为势能恒为零，根据机械能守恒，可知质点的动能守恒，即速度大小不变。球坐标中速度的分量是$(\dot{r},r\dot{\theta},r\dot{\varphi}\sin\theta)$，所以速度大小不变的方程是

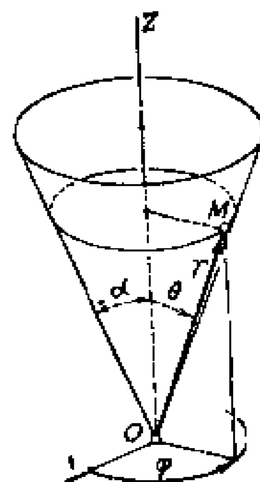


图4.51 锥面上的坐标

$$\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha=C_1\ (\text{常量})。\qquad (1)$$

此外，约束力与锥轴相交，质点对这轴的动量矩守恒，由此得

$$r^2\dot{\varphi}\sin^2\alpha=c_2\ (\text{常量})。\qquad (2)$$

消去 $\dot{\varphi}$，得(1)和(2)

$$\frac{dr}{dt}=\pm\sqrt{c_1-\frac{c_2^2}{r^2\sin^2\alpha}}.$$

由式(2)解出$\dot{\varphi}$，并与上式相除，得

$$\frac{dr}{d\varphi}=\pm r^2\sin^2\alpha\cdot\sqrt{\frac{c_1}{c_2^2}-\frac{1}{r^2\sin^2\alpha}}.$$

这是质点轨迹的微分方程。

这个方程可以直接求积，但为了说明轨迹的几何意义，我们来作一些变换。把$u=1/r$和$\psi=\varphi\sin\alpha$作为新的变量（注意α是常量），于是轨迹的微分方程可以改写成

$$\left(\frac{du}{d\psi}\right)^2=\frac{c_1\sin^2\alpha}{c_2^2}-u^2.$$

对ψ求导，得

$$\frac{d^2u}{d\psi^2}+u=0.$$

显然，这个方程的通解是

$$u=A\cos\psi+B\sin\psi,$$

其中A和B是积分常数，由初条件决定。将$u=1/r$和$\psi=\varphi\sin\alpha$代回就得轨迹方程

$$Ar\cos(\varphi\sin\alpha)+Br\sin(\varphi\sin\alpha)=1, \qquad (3)$$

这是一条复杂的空间曲线。

现在将锥面沿$\varphi=0$这条母线剖开，并将它展开成为一平面扇

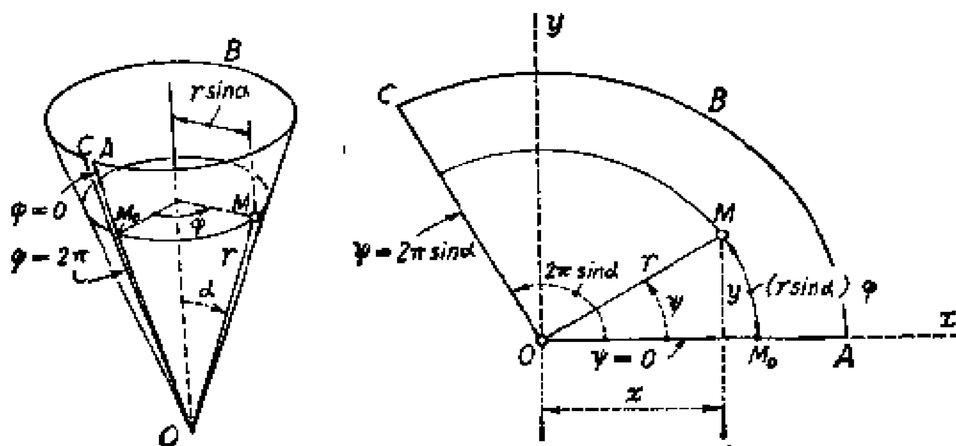


图4.52　锥面展开为扇形

形（图4.52）。设锥面上M点的球坐标为(r,α,φ)。在展开图上，因为弧长$\overset{\frown}{M_0M}=(r\sin\alpha)\cdot\varphi=r\psi$，$\angle M_0OM$就是$\psi$角，因此$r$和$\psi$就是展开图上$M$点的极坐标。空间曲线(3)在平面上的极坐标方程为

$$Ar\cos\psi+Br\sin\psi=1。\tag{4}$$

如果在这个展开图上取直角坐标(x,y)，那么

$$x=r\cos\psi,\qquad y=r\sin\psi。$$

所以，空间曲线(3)在平面上就变成为

$$Ax+By=1,$$

这显然是一条直线。最后的结论非常简单，如果把锥面展开成平面之后，质点惯性运动的轨迹就是这平面上的一条直线。据此，要想找锥面上惯性运动的轨迹，只要按初条件在展开面上画出一条直线，然后再把这个平面卷起来成为锥面就行了。要注意的是，$\varphi=0$（对应于$\psi=0$）和$\varphi=2\pi$（对应于$\psi=2\pi\sin\alpha$）在锥面上是同一条母线，所以在展开图上要把$\psi=0$和$\psi=2\pi\sin\alpha$当作同一条直线来看待。比如在图4.53(a)中，在已知两点A与B之

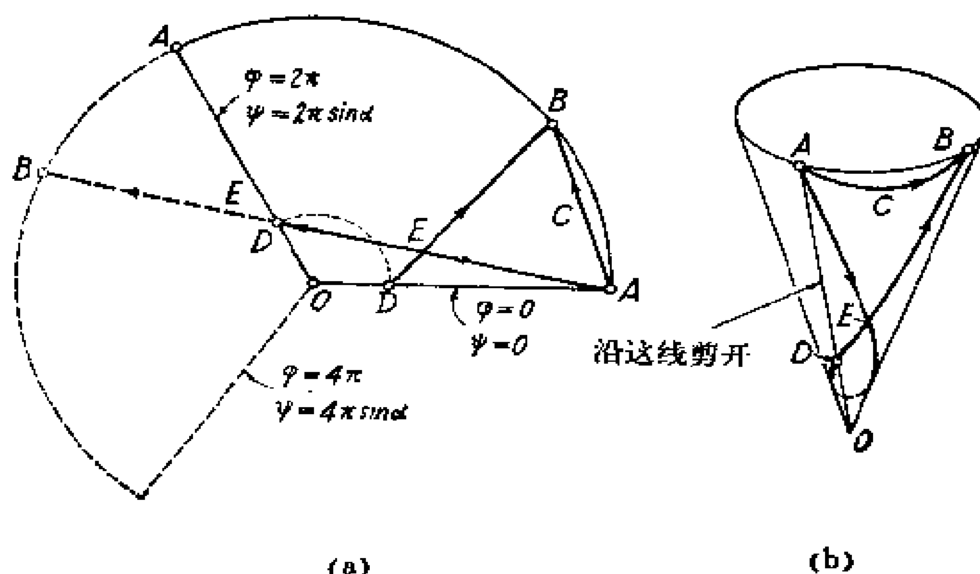


图4.53 锥面上的惯性运动

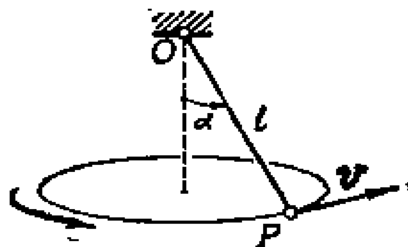
间可以作出两条直线ACB和$AEDEB$，它们代表两条不同的惯性运动轨迹。注意$\psi=0$线上的D点和$\psi=2\pi\sin\alpha$线上的D点代表锥面上同一点；图中第二个扇形上的DB线与第一个扇形上的DEB线在锥面上是同一条线。真实的轨迹就是把平面扇形再卷回成锥面而得到，如图4.53(b)。▌

这个例子只是一般惯性运动的特例。一般说来，约束在光滑曲面上的点，在不受任何主动力时的运动（惯性运动）的轨迹是曲面上的所谓测地线或短程线。在它的邻近的小范围内，测地线是两点之间最短的曲线。平面上的测地线就是直线。球面上的测地线是大圆。曲面上两点之间可以有几条测地线，比如，在地球球面上由北京到昆明的测地线有两条，一条是短于半圆的大圆弧段，另一条则大于半圆。对于可展曲面（锥面、柱面），在曲面展开为平面图形后，曲面上的测地线就展成为直线。

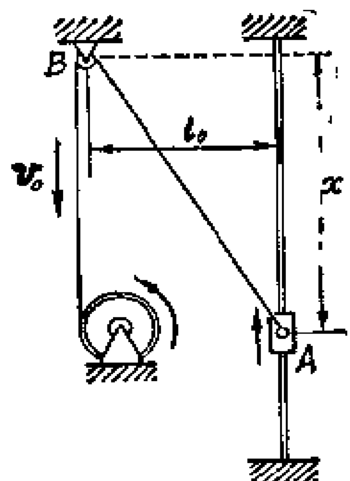
习　题

4.1 假定飞机的机翼平面与水平面的倾角为α，且飞机的速度大小恒等于v，求飞机在水平面内作圆周盘旋运动的半径。假定飞机受到的升力垂直于机翼平面。

4.2 锥摆的摆长为l，摆锤重p，当保持摆线与竖直线的夹角为α时$\left(见图,\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$，求摆锤



题 4.2 图



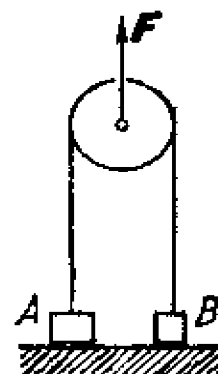
题 4.3 图

的速度大小 v 和线中张力之大小 T。

4.3 物体 A 重 P，由吊索拖着沿竖直杆上升（见图）。吊索跨过一光滑滑轮 B 绕在匀速转动的鼓轮上。已知滑轮 B 的中心到竖直杆的距离为 l_0，吊索的线速度为 v_0，求吊索的张力的大小 T 与 x 之间的关系。

4.4 一质点的质量为 m，沿椭圆轨道 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 运动。质点的加速度与 y 轴平行。当 $t=0$ 时，质点的坐标为 $x=0$，$y=b$，且初速度大小为 v_0。求质点在轨道上任何位置时所受的力。

4.5 图示物块的质量为 $m_A=20$ 千克，$m_B=10$ 千克。最初它们静止在地板上，用绳子跨过滑轮将它们连接起来，不计绳子和滑轮的重量，不计摩擦。今有向上作用于滑轮中心的力 $F=294$ 牛顿，求物块 A 和 B 的加速度各为多少？（$g=9.8$ 米/秒^2。）



题 4.5 图

4.6 直升飞机重 P，它竖直上升的螺旋桨的牵引力为 $1.5P$，空气阻力 $R=kPv$，式中 k 为常数。求直升飞机上升的极限速度。

4.7 质量为 M 的汽车在水平公路上行驶。设发动机的功率（速度乘牵引力）是常量 P，地面阻力为常量，汽车的极限速度为 w。汽车由静止出发，经过时间 t，距离 s 后，达到速度 v。求证：

$$s=(Mw^3/P)\{\ln[w/(w-v)]-(v/w)-v^2/2w^2\},$$
$$t=(s/w)+(Mv^2/2P).$$

4.8 带电油滴在空气中降落。假定油滴形状是圆球，密度为 ρ，运动初速度为零。已知空气阻力的大小等于 $6\pi\mu rv$，其中 μ 为空气的粘性系数，r 为油滴的半径，v 为油滴的降落速度。电场作用于油滴的力方向向上，大小等于 qE，其中 q 为油滴所带的电荷，$E=$常量是电场强度。求油滴降落时的运动方程。

4.9　已知飞机重3吨，螺旋桨推力为1.5吨，起飞速度为130公里/小时，空气阻力等于$0.2v^2$（单位公斤，v以米/秒计）。为使飞机能在舰船上起飞，采用特种弹射器来减小飞机的自由滑行路程。假定作用于弹射器上的有效附加推力等于0.5吨，问起飞跑道的长度可缩短多少？

4.10　物体无初速地自极高处自由落下，假定所受引力与到地心的距离平方成反比，开始时物体离地心的距离为H，不计空气阻力，求物体的速度和运动规律。（提示：可将时间t表成离地心的距离x的函数。）

4.11　假想有一穿过地心的笔直隧道，已知一质点处在地球内部时受到的引力与它到地心的距离成正比，且此引力朝向地心。今有一小球自地面无初速地放入隧道，分析小球的运动：

（1）求小球的运动方程。

（2）求小球到达地心所需要的时间。

（3）小球到达地心时的速度。

（地球半径$R=6370$公里，$g=9.8$米/秒^2。）

4.12　上题中的隧道如果不经过地心，即偏心地穿过地球，不计小球与隧道壁的摩擦，结果有什么变化？

4.13　在4.11题中，假设有一物体自地面上高R处无初速地下落，且当它落到地面时恰好掉进隧道，求证：

（1）物体到达地心时的速度为$\sqrt{2gR}$。

（2）它到达地心所需的时间为$\left(1+\frac{3}{4}\pi\right)\sqrt{R/g}$。

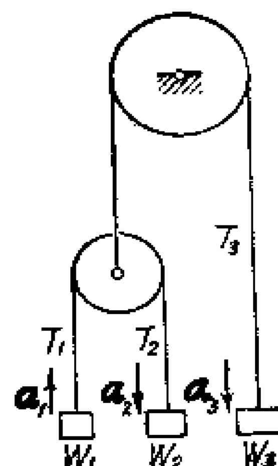
4.14　将一质量为m的石子以初速v_0竖直上抛，它落回起点时的速度为u，设重力为常量mg。

（1）如果空气阻力R与速度v的平方成正比，即$R=mkv^2$，k为常量，求证：$u=v_0(1+kv_0^2/g)^{-\frac{1}{2}}$；

（2）如果$R=mkv$，求证：

$$g-ku=(g+kv_0)\exp[-k(u+v_0)/g].$$

4.15　在一固定滑轮上穿一绳，绳的一端挂一重W_3=3公斤的砝码，绳的另一端挂一滑轮。在动滑轮上又穿一绳，绳的两端分别挂重W_2=2公斤和W_1=1公斤的砝码。不计绳和滑轮的重量，不计摩擦，求每个砝码的加速度和绳中张力。

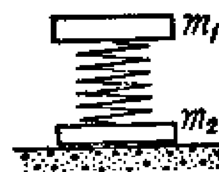


题 4.15 图

4.16　橡皮绳子原长l，上端A固定，下端与重球相连结。当重球处于平衡时，绳子被拉长b。现将重球提高到上端A处再无初速地释放，求重球落至最低点D时所需要的时间和最低点的位置。

4.17　弹性系数分别为k_1和k_2的两弹簧串联后上端挂在天花板上，下端挂一质量为m的物块，计算物块振动的周期。如果两弹簧并联，振动周期又为何值？

4.18　用一弹簧把质量分别为m_1和m_2的两块板连起来，问必须加多大的力在上面的板m_1上，以便当力突然撤掉后，上面的板跳起来时能使下面的板被提起而脱离地面？不计弹簧质量，不计空气阻力。



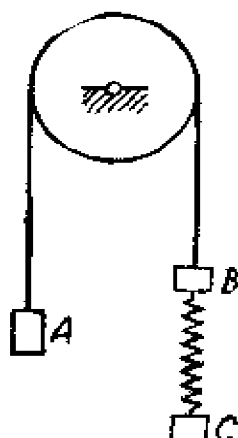
题 4.18 图

4.19　滑轮上系一不可伸长的绳子，绳上悬一弹簧，弹簧的另一端挂一重量为P的物块。当滑轮匀速转动时，物块以常速度v_0下降。如将滑轮突然停住，求弹簧的最大伸长及最大张力。假定弹簧受力P的作用时伸长为δ。

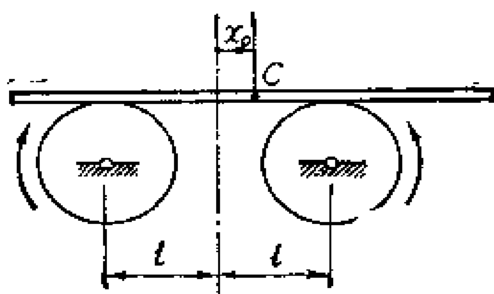
4.20　弹簧上端固定，原长为l，下端挂一质量为m_1的物块，静伸长量为a。现在这物块上再挂上质量为m_2的另一物块，并让弹簧伸长，达到新的平衡位置。如将物块m_2突然撤去，求物块m_1的运动规律。

4.21　图示质量弹簧系统，物块A，B和C的质量分别是$2m$，m与m，A和B之间用不可伸长的绳子通过光滑的滑轮相连结，

B 和 C 之间用弹簧相连结。弹簧的原长为 a，弹性系数 $k=mg/a$。先用一手托住 A，另一手托住 C，且使弹簧维持原长。现两手同时放开，如不计绳和弹簧的质量，求证以后三物块的运动都是简谐运动，并求出振动周期、绳中张力和弹簧中的张力。



题 4.21 图

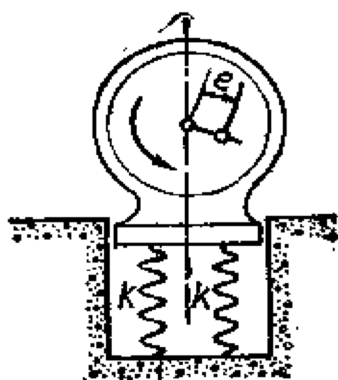


题 4.22 图

4.22 均质木条水平地放在两个相同的鼓轮上，若两轮边缘的速率 $u=20$ 厘米/秒（方向如图），两轮中心距离 $2l=39.2$ 厘米，摩擦系数 $\mu=0.32$。初始时，木条重心 C 位于离两轮的中心偏右 $x_0=10$ 厘米处，初速 $v_0=0$。求木条的运动规律，取 $g=980$ 厘米/秒^2。

4.23 设质量弹簧系统振动时质点受到的阻力等于 cmv^2，其中 c 为常数，m 为质量，v 为速度。初始时将质点拉到离开平衡位置距离为 a 的地方，而后无初速地放手。它在运动中速度第一次为零时离开平衡位置的距离为 b。求证 a 和 b 的关系是

$$(1+2ca)e^{-2ca}=(1-2cb)e^{2cb}.$$



题 4.24 图

4.24 重 180 公斤的电动机由四个弹性系数 $k=30$ 公斤/厘米的弹簧支持，电动机被限制在竖直方向运动，$g=980$ 厘米/秒^2。电动机转子上装一重 0.2 公斤的重物，距转轴的距离 $e=1$

厘米。求：

（1）发生共振时的转速 n（以转/分计算）；

（2）当电动机转速为3000转/分时，定常振动的振幅 A。

4.25 质量 $m=2$ 的质点受一弹性力的作用而沿 Ox 轴运动，弹性力为 $-8x\boldsymbol{i}$。假定外作用力 $\boldsymbol{F}=12\cos t\,\boldsymbol{i}$，且初始时 $x=0$，$v=0$，求质点的运动规律。

4.26 一枪弹以仰角 φ，初速 v_0 自倾角为 α 的斜面下端向上发射。求子弹击中斜面的地方与发射点间的距离，当 φ 取各种不同值时求这距离的最大值（仰角 φ 自水平面算起）。

4.27 用炮弹轰击水平地面上某一目标。如以仰角 α 发射，炮弹落地处超过目标 a 米；如以仰角 β 发射，则落地处在目标以内，并离目标 b 米。假定炮弹的膛口速度相同，不计空气阻力，求仰角应为多少时才能恰好击中目标？

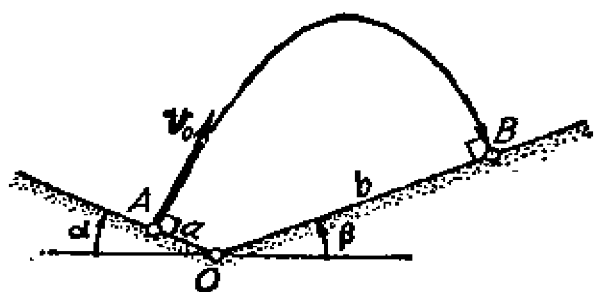
4.28 两个男孩在长廊上玩接球游戏。设天花板离地面的高度是 H，两男孩的肩高都是 h，球在肩的高度被抛出或接住。如果孩子们能以速度 v_0 把球抛出，求两人相隔的最大距离。（提示：分别考虑 $(H-h)$ 大于和小于 $v_0^2/4g$ 的情形。）

4.29 求证抛射体沿斜面的最大射程等于在飞行时间内自由落体所经过的距离，假定不计空气阻力。

4.30 一枪自同一地点射出两颗子弹。两子弹在同一竖直平面内运动，初速度都是 v_0，发射角分别为 α_1 和 α_2，两次发射的时间间隔为 τ。求两子弹在空中恰好相遇时应满足的条件。

4.31 一火炮放在高为 h 的山顶上。如炮弹的初速为 v_0，不计空气阻力，为了使炮弹射到地面时的射程最大，初速与水平方向的夹角 α 应为多少？

4.32 将一质点以初速 v_0、仰角 α 抛出，质点受到的阻力为 kmv，其中 k 是常数，m 为质点的质量，v 为速度。求质点的速度与水平线之间的夹角大小又为 α 时其所经过的时间。



题 4.33 图

4.33 斜面 OA 与 OB 的倾角各为 α 与 β。设自 A 处射出一子弹，初速为 v_0，且垂直于斜面 OA，距离 $OA=a$。子弹击中斜面 OB 时其速度与 OB 恰好垂直，求证：

$$v_0^2=\frac{2ga\sin^2\beta}{\sin\alpha-\sin\beta\cos(\alpha+\beta)}.$$

4.34 自行车竞赛跑道转弯部分的路面外侧高于内侧，与水平面的倾角为 α，弯道的半径为 R。设车胎与路面间的摩擦系数为 μ，问自行车转弯时的最大与最小速度各为多少？

4.35 在倾角等于摩擦角的斜面上，水平投射一质点，初速为 v_0，求质点在斜面上的轨迹。

4.36 从一点同时抛出许多初速的大小相同而方向不同的质点，不计空气阻力，求证在任何时刻，这些质点都在同一个球面上。

4.37 一质量为 m 的质点，受一与距离成反比的引力作用，在一直线上运动，比例系数为 k。如果这质点从离原点 O 的距离为 a 的地方开始运动，初速为零，求它到达原点所需的时间。

4.38 说明下面的论证是否正确，如不正确错在哪里？把一质量为 m 的物体挂在一个上端固定且未被拉伸的弹簧的下端（此处取坐标 $y=0$），然后使物体慢慢下降。当物体下降到平衡位置 $y=\delta$ 处时，重力势能减小了 $mg\delta$，弹性势能增加了 $\frac{1}{2}k\delta^2$，其中 k 是弹性系数。所以平衡位置的 δ 由下式给出：$mg\delta=\frac{1}{2}k\delta^2$，即 $\delta=2mg/k$。

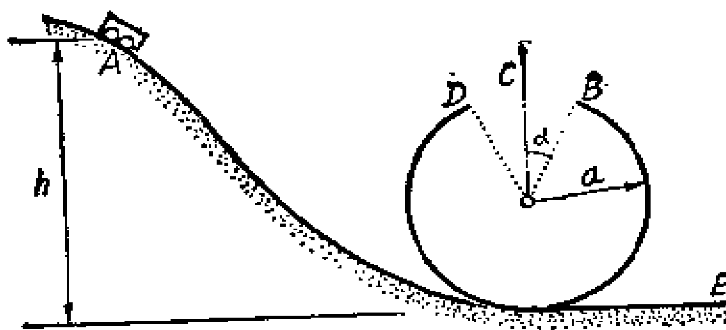
4.39 质点 P 受中心 O 的吸引，引力 $F=km/x^4$，其中 $x=OP$，m 为质点的质量，k 是常数。初始时，距离 $OP=x_0$，初速

为零，求当 $OP=\frac{1}{2}x_0$ 时质点的速度。

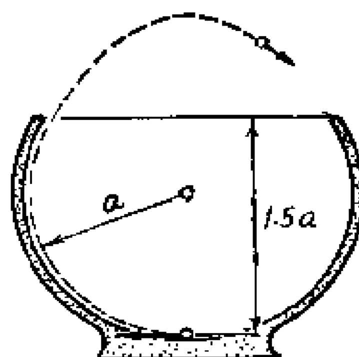
4.40 位于地球表面的质点具有竖直向上的初速度 $v_0=\sqrt{2gR}$（第二宇宙速度），不计空气阻力，R 是地球半径，g 是地球表面处的重力加速度，求质点的运动方程。

4.41 求证在地球高空任一点处的第二宇宙速度（脱离地球所需的最小速度）是第一宇宙速度（作圆周运动的速度）的 $\sqrt{2}$ 倍。

4.42 小车沿轨道 AB–DE 滑动（见图），它在 A 处的速度为零，BCD 是半径为 a 的圆轨道的缺口，$\angle BOC=\angle COD=\alpha$。如不计摩擦，问高度 h 应为多少时才能使小车越过缺口循上述路径运动？为了使 h 值最小，α 角应为多少？



题 4.42 图

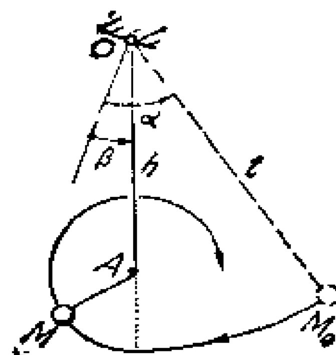


题 4.43 图

4.43 光滑圆球形碗的深度是半径 a 的 1.5 倍，一质点自碗底水平投掷时可升到碗缘，并在空中作一抛物线的运动后再落至另一侧的碗缘上。求证：

（1）质点在抛物线顶点时的速率为 $\sqrt{ga/2}$；

（2）质点在抛物线顶点、碗缘及碗底的速率之比是 $1:2:\sqrt{10}$。



题 4.44 图

4.44　质量为m摆长为l的单摆从M_0无初速地向左运动（见图）。在A处有一细铁丝，$OA=h$，OA与竖直线的夹角为β。当摆线碰到铁丝后，质点M即绕A点旋转。问初始摆角α等于多少时才能使摆线碰到铁丝后M能绕过全圈？又当摆线碰到铁丝的前后，线中张力改变了多少？

4.45　应用能量积分解4.13题、4.16题和4.19题。

4.46　弹性绳子的一端固定于光滑水平桌面上的O点，另一端与桌面上的质量为m的小球P相连，绳子的自然长度是a，弹性系数是k，初始时$OP=2a$，且小球的速度垂直OP。求证：

（1）如果起始时小球的动能超过总机械能的四分之一，则以后绳子不会再达到它的自然长度；

（2）如果起始时的动能是总机械能的五分之一，则绳将在某一时刻回到自然长度，且在以后保持松弛的时间间隔为$\frac{4}{5}\sqrt{\frac{m}{k}}$。

（提示：弹性绳子与弹簧不同，当弹性绳子的长度小于原长时，绳子处于松弛状态。）

4.47　求证：在力与距离的平方成反比的椭圆运动中，动能对时间的平均值等于势能对时间平均值的一半。

4.48　质量为m的质点在水平面的上空受斥力的作用而处于悬浮状态，斥力的大小与质点到这平面的距离成反比，比例系数为λ。求质点在平衡位置附近作竖向微振动的周期。

4.49　一匀质圆锥体，高度为H，重度为γ_1，浸在重度为γ_2的液体中（$\gamma_2>\gamma_1$）。圆锥顶点浮在液面之上而底面与液面平行，不计液体的阻力，求圆锥竖向微振动的周期。

4.50　半径为R的均质圆球浸在液体中平衡时，浸入部分的深度为h，不计液体的阻力，求圆球竖向微振动的周期。

4.51　一质量为m的质点带有电荷Q，位于一长为$2l$的水平线段上，线段两端具有两个同性且相等的固定电荷q，求质点在

平衡位置附近作微振动的周期。(提示：根据库仑定律，电荷的相互作用力等于$\frac{qQ}{r^2}$，r是带电质点间的距离。)

4.52 一容器的体积为V_0，其内部单位面积上的空气压力(压强)是p_0，等于外界气压。容器上联有一截面面积为s的圆管，管口有一质量为m的活塞。假定容器内气体的压力p与体积V之间的关系为$pV^\gamma=$常量，γ是常数。不计活塞摩擦，不计气体质量，求活塞在平衡位置附近作微振动的周期。

4.53 弹性绳子自然长度为$2l$，两端固定在同一水平高度的A和B两点，$AB=2l$。将一重球固结在绳子的中点C，在平衡时ABC成一正三角形。如将重球偏离平衡位置，则重球将作自由振动。求证重球在竖向作微振动时的周期是

$$T=4\pi\sqrt{\frac{\sqrt{3}\,l}{7g}}\approx 6.25\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

4.54 小环质量为m，可在光滑斜杆上滑动，杆与水平面的夹角为α，环用弹性绳子与一固定点相连，固定点到杆的垂直距离恰好等于弹性绳子的自然长度，固定点与杆在同一竖直平面内且在杆的上方，重力加速度为g，绳子的弹性系数是k。求证：

(1) 平衡时绳子与斜杆之间的夹角θ满足方程

$$\operatorname{ctg}\theta-\cos\theta=(mg\sin\alpha)/kl;$$

(2) 小环在平衡位置附近作微振动的周期为

$$T=2\pi\Big/\sqrt{\frac{k}{m}(1-\sin^3\theta)}.$$

4.55 在相平面上画出4.20题中质点和4.22题中木条重心的相轨迹。

4.56 质量$m=0.2$千克，弹性系数$k=3.92$牛顿/米的质量弹簧系统，质点与水平面间的摩擦系数$\mu=0.12$。初始时将质点拉到弹簧伸长20厘米处而后无初速地释放。不计弹簧质量与空气

阻力，取 $g \simeq 9.8$米/秒²，求质点静止时的位置，并在相平面上画出质点运动的相轨迹。

4.57 单位质量的质点在有心力作用下沿 Ox 轴运动，所受力沿 Ox 轴方向的投影为 $-\frac{\mu}{x^2}+\frac{\mu b^2}{a x^3}$，其中 μ，a 和 b 为常量，且 $b<a$。初始位置 $x_0=a+\sqrt{a^2-b^2}$，初速为零。

（1）求证质点经过时间 $t_1=\pi a^{3/2}/\sqrt{\mu}$ 以后到达 $x_1=a-\sqrt{a^2-b^2}$ 处，此时速度为零，质点在 x_0 和 x_1 之间来回振动；

（2）在相平面上画出质点运动的相轨迹；

（3）求质点在稳定平衡位置附近作微振动的半周期（注意它和(1)中的 t_1 有什么区别?）。

4.58 在 4.16 题中，如果 $b=\frac{2}{3}l$，

（1）求证重球运动的周期为

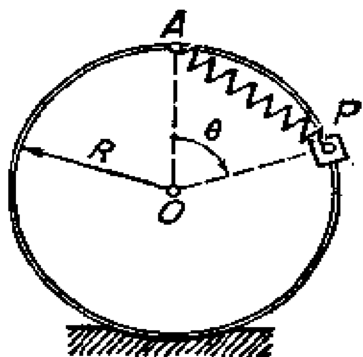
$$T=\left(2\sqrt{2}+\pi\sqrt{\frac{32}{27}}\right)\sqrt{\frac{l}{g}}\approx 6.25\sqrt{\frac{l}{g}};$$

（2）在相平面上画出重球运动的相轨迹。

4.59 半径为 R 的光滑圆环固定在竖直平面内（见图）。弹簧的原长为 R，弹性系数 $k=(\sqrt{2}+2)mg/R$，其一端固定在大环的顶点 A 处，另一端系一质量为 m 的滑块 P，滑块套在环上。

（1）求滑块 P 的平衡位置 θ；

（2）求滑块 P 在稳定平衡位置附近作微振动的周期。



题 4.59 图

4.60 求证：如质点受有心力作用而作圆周运动，其极坐标方程是 $\rho=2a\cos\varphi$，则力的径向投影 F 与 ρ 的关系是

$$F=-\frac{8ma^2h^2}{\rho^5},$$

其中 m 为质点的质量，$h=\rho^2\dot{\varphi}$ 是面积速度的两倍。

4.61 求证：如质点受有心力作用而作双纽线运动，其极坐标方程是 $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$，则力 $F=-3ma^4h^2/\rho^7$，其中 m,h 的意义同上题。

4.62 求证：如质点所受的有心力的径向投影

$$F=-m\left(\frac{\mu^2}{r^2}+\frac{\nu}{r^3}\right),$$

则其轨道方程用极坐标(ρ,φ)可写成

$$\rho=\frac{a}{1+e\cos k\varphi},$$

其中 μ 和 ν 都是常量，且 $\nu<h^2, k^2=(h^2-\nu)/h^2, a=(kh/\mu)^2, e=Aa$，$A$ 是积分常数。

4.63 质量为 m 的行星在牛顿引力（大小为 $\mu m/r^2$）的作用下的运行轨道为一椭圆，它的半长轴为 a，求证：

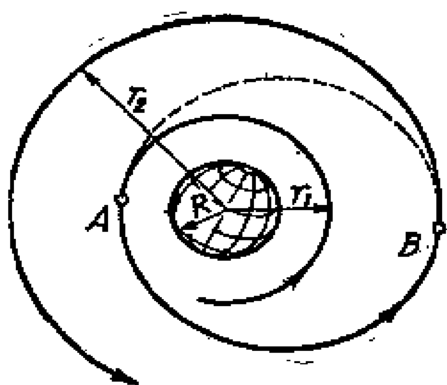
$$v^2=\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right).$$

利用这个公式证明在椭圆短轴端点处的速率为$\sqrt{\mu/a}$。

4.64 质点在有心引力作用下运动，此力的大小是质点到力心距离 r 的函数，而质点的速率则与此距离成反比，即 $v=a/r$。求点的轨迹。

4.65 我国第一颗人造地球卫星（1970 年 4 月 24 日发射）的近地点是 439 公里，远地点是 2384 公里。已知地球半径 $R=6370$ 公里，求卫星的近地点速度 v_1，远地点速度 v_2 和运动周期 T。

4.66 一航天器绕地心作圆周运动。航天器的质量为 3000 千克，轨道半径 $r_1=2R$，$R=6400$ 公里是地球半径。若要将航天器转移到半径 $r_2=4R$ 的另一圆周轨道上去，



题 6.64 图

（1）求转移所需的最小能量；

（2）一个最经济的转移路径是利用如图所示的半椭圆轨道（叫做 Hohmann 转移轨道）。求在它的两条轨道的交接处A和B处的速度增量。

4.67　假设地球和火星的轨道都是圆周，且在同一平面内，求从地球上发射到火星的火箭所需的最小速度。已知火星离太阳的距离为1.52天文单位。

4.68　如果行星在远日点和近日点处的速率分别为v_A和v_B，求证$v_A:v_B=(1-e):(1+e)$，其中e为行星椭圆轨道的偏心率。

4.69　某彗星的轨道为抛物线，其近日点距离为地球轨道（假定为圆周）半径的$\frac{1}{n}$倍。求证：

（1）彗星运动时，在以1天文单位为半径的球面内停留的时间是一年的$\frac{2(n+2)}{3\pi n}\cdot\sqrt{\frac{n-1}{2n}}$倍。

（2）任何抛物线轨道的彗星，停留在上面所说球面内的最长时间为一年的$\frac{2}{3\pi}$倍，或约76天。

4.70　质量为m的质点在固定力心O的斥力作用下运动，斥力按规律$F=k^2mr$变化，其中r为质点的向径，k为常量。开始时，质点位于M_0处，其直角坐标为$(a,0,0)$，初速为v_0，其方向平行y轴，求质点运动的轨迹。

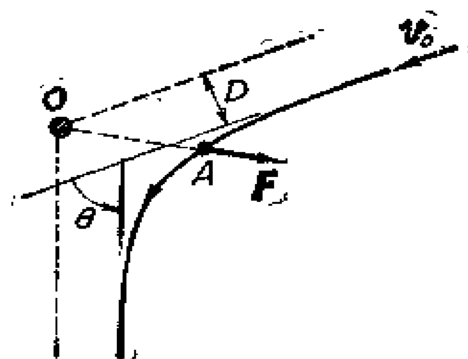
4.71　原子核O（当作固定点）带有正电荷Ze，其中Z是该原子的原子序数，e为基本电荷。设有粒子A，质量为m，带有正电荷e'。它以初速v_0由十分远处发射，由O至v_0的垂线的

距离是 D。考虑库仑斥力大小

$$F=kZee'/r^2$$

的作用，其中 r 为粒子与原子核间的距离，k 为常数。证明粒子远离原子核时的偏转角为

$$\theta=2\ \mathrm{arc\ tg}\,\frac{kZee'}{Dmv_0^2}.$$



题 4.71 图

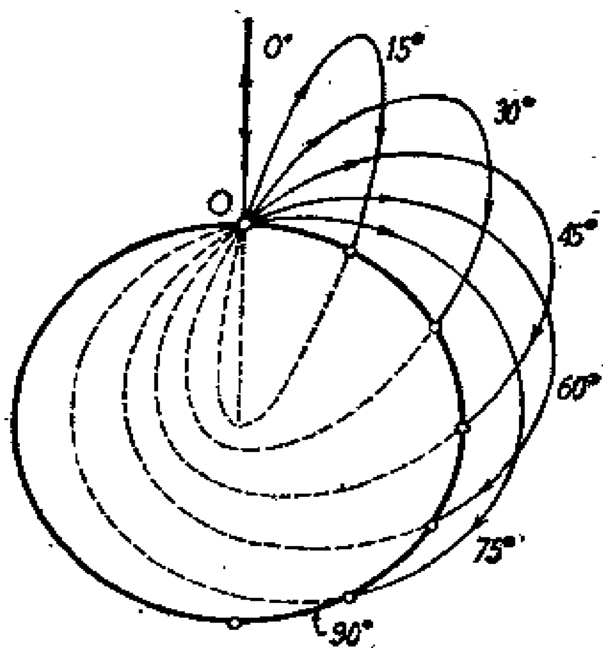
4.72 质量为 m 的质点 P 受到 n 个固定中心 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的吸引。质点 P 与所有的引力中心同在 Oxy 平面内，且中心 c_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 的吸引力等于 $k_i m\overline{Pc_i}$，k_i 为常量。设当 $t=0$ 时，$x=x_0$，$y=y_0$；$\dot{x}=0$，$\dot{y}=v_0$。不计重力和阻力，求质点 P 的运动轨迹。

4.73 一质点 P 受两力心 C_1 和 C_2 的吸引，引力与距离成正比，并各等于 $km\overline{PC_1}$ 和 $km\overline{PC_2}$，k 为常数，m 为质点的质量。力心 C_1 固定在坐标原点，力心 C_2 沿 x 轴作等速运动。质点的运动方程为

$$x=2(a+bt),$$

a 和 b 为常量。质点的初始位置为 $x_0=y_0=a$，$z_0=0$，初速度为 $\dot{x}_0=\dot{z}_0=b$，$\dot{y}_0=0$，求质点的运动轨迹。

4.74 从地球表面以第一宇宙速度发射一火箭，不计空气阻力。求证：初速度与竖向的夹角每增减1°，射程相应地增减 222 公里。已知地球半径 $R\doteq 6370$ 公里。



题 4.74 图

（提示：$6370\times\frac{\pi}{90}=222$，图示以不同夹角发射的轨道。）

4.75　质量为m的小球，用不可伸长的线系住，在光滑的水平面上运动。线的另一端穿过平面上的一小孔，并以常速u向下运动。假设初始时线是直的，球与孔间的距离为R，而球的初速的横向分量为v_0，求小球的运动方程及线中的张力。

4.76　质点P在光滑水平桌面上运动，它与弹簧的一端相连。弹簧原长为a，其另一端O固定在桌面上。开始时质点作半径为$6a/5$的匀速圆周运动，后在OP方向给质点一微小冲击。求证：质点P将在原圆周轨道附近振动，且微振动周期是质点原来作圆周运动时周期的三分之一。

4.77　假定人造地球卫星的轨道是一半径为r的圆周，运动周期为T_0。宇航员以相对速度u向地心投出一个小块P，$u\ll\sqrt{Rg}$，R为地球半径，g为地表重力加速度。

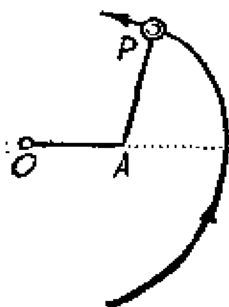
（1）证明小块P的运动轨道为一椭圆；

（2）求这椭圆的偏心率e，半长轴a和半短轴b；

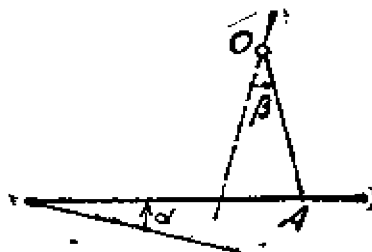
（3）求P的运动周期T；

（4）若$T_0=90$分，$u=10$米/秒，$r/R=1.04$，近似到u^2/Rg的一阶小量，估算一下$(T-T_0)$的值。

4.78　弹性绳子的一端固定在光滑水平面上的O点，另一端系一质量为m的小球P。已知弹性绳的原长为l，弹性系数



题 4.78 图



题 4.79 图

$k=2mg/l$。开始时质点P在水平面上以常速率$u=\sqrt{3gl/2}$作匀速圆周运动，后突然摁住弹性绳的中点A，取$AP=\rho$，求在以后的运动中，小球的径向速度$\dot{\rho}=0$时，ρ所满足的代数方程。

4.79 一质点自倾角为α的斜面上方的O点，沿一光滑槽OA下滑。考虑重力作用，为了使这质点到达斜面所需的时间最短，斜槽OA与竖直线所成的角β应为多少？

4.80 一椭圆环的长轴是竖直的，质点自椭圆环上一点沿椭圆的一条直径（通过椭圆中心）下滑到对边椭圆环上的一点。考虑重力作用，不计摩擦，问沿哪一条直径所需的时间为最短？

4.81 光滑铁丝弯成抛物线形状，其轴线是竖直的，顶点在下。一珠子穿在铁丝上，在重力作用下，在铁丝的两点间来回振动，连结这两点的直线通过抛物线的焦点。求证：当珠子经过顶点时，铁丝的约束力是珠子重量的两倍。

4.82 已知旋轮线的方程为

$$x=a(2\theta+\sin 2\theta),\quad y=-a(1+\cos 2\theta),$$

y轴向上为正。一质量为m的质点沿旋轮线运动。开始时质点位于尖点$x=-\pi a, y=0$处，初速为零。不计摩擦，求证在任何一点处质点对旋轮线的压力为$2mg\cos\theta$。

4.83 在上题中，如质点与旋轮线之间不是光滑的，且质点自尖点$(-\pi a,0)$无初速地下滑，当质点到达最低点时恰好停止运动，求证摩擦系数μ应满足关系式

$$\mu e^{\mu\pi/2}=1.$$

4.84 一质点在重力作用下沿光滑曲线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}$运动，$y$轴向上为正。初始时质点位于$(-l,0)$处，初速为零。求质点到达点$(0,-l)$时所需要的时间。

4.85 旋转曲面的柱坐标方程是$2a^3z=a^2\rho^2+\rho^4$，a是常数，z轴向上为正。一质点沿曲面上的水平圆周作匀速圆周运动，圆周半径为a，不计摩擦，求证：

（1）质点速度的大小是$\sqrt{3ga}$；

（2）如果质点受到沿曲面子午线切向的一微小冲击，则质点作微振动的周期是$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{10a}{g}}$。

习题答案

第一章

1.1 $\boldsymbol{R}=2\overrightarrow{AG}$.

1.2 取 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别沿 OE, OC 和 OA 方向，则 $\boldsymbol{R}=\sqrt{2}P(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$;

或 $\boldsymbol{R}=2P$, $\cos(R,x)=0$, $\cos(R,y)=\sqrt{2}/2$, $\cos(R,z)=\sqrt{2}/2$.

1.3 $R=\sqrt{2}P$.

1.5 $\boldsymbol{F}=\dfrac{F_1-F_2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\boldsymbol{e}_1+\dfrac{F_2-F_1\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\boldsymbol{e}_2$.

1.6 设其他三棱的单位向量为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$，则

① $F=F(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)$;

② $F_1=\dfrac{1}{9}F$, $F_2=-\dfrac{7}{9}F$, $F_3=\dfrac{1}{9}F$.

1.7 $\boldsymbol{R}=3\sqrt{3}\boldsymbol{e}_1\mp\sqrt{2}\boldsymbol{e}_2$.

1.8 取坐标系 $Oxyz$ 原点在 O，三轴分别沿 OE, OC 和 OA 方向，则 $\boldsymbol{L}_O=\sqrt{2}Pa(-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$，中心轴方程为 $y=z$, $x=a$.

1.9 $\dfrac{1}{2}Pa$.

1.10 取坐标系 $Hxyz$ 的原点在 H，三轴分别沿 HA, HG, HE，则

$$\boldsymbol{R}=Q\boldsymbol{i}+P\boldsymbol{j}+S\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{L}_H=-Pc\boldsymbol{i}-Sb\boldsymbol{j}-Qa\boldsymbol{k},$$

$$m_{Hc}=-\frac{Pbc+Sab+Qac}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

1.11 $\boldsymbol{L}=2P\overrightarrow{DA}$.

1.15 主向量 $\boldsymbol{R}=0$，主矩 $\boldsymbol{L}_O=16\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-17\boldsymbol{k}$；

或 $L_O=3\sqrt{61}$，

$\cos(L_O,x)=16/3\sqrt{61}$，$\cos(L_O,y)=-2/3\sqrt{61}$，

$\cos(L_O,z)=-17/3\sqrt{61}$。

1.18 轨迹为一圆柱面。柱面的对称轴与力系的中心轴重合，柱面半径为 $r=\sqrt{L_O^2-L_A^2}/R$，R 为已知力系主向量的大小，O 点为化简中心，$L_A=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{L}_O/R$。

1.20 $z_c=\frac{3}{8}\sqrt{R^2-r^2}$，其中 R 为圆球半径，r 为小圆柱半径，z 为通过球心且垂直底面的轴。

1.23 $N_A=W$，$N_B=W/2\sqrt{3}$，$T=N_B$。

1.24 $\sin\varphi=\frac{Pa}{(W+P)(a+l)}$。

1.25 $N_A=P/\cos\alpha$，$N_B=P\operatorname{tg}\alpha$，$\alpha=\arccos(a/l)^{1/3}$。

1.26 $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{Q\pm\sqrt{Q^2+2P^2}}{2P}$，水平反力 $X_A=-Q\sin\frac{\alpha}{2}$，垂直反力 $Y_A=P\mp Q\cos\frac{\alpha}{2}$。$x$ 轴水平向右，y 轴竖直向上。

1.27 $T=\frac{W}{2}\cdot\frac{b\sqrt{a^2+b^2-r^2}-ar}{b^2-r^2}$。

1.28 $P=Q$，$W=P(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)$。

1.29 $x>\left[\frac{(W+P)h}{\sin\alpha\cos^2\alpha}-Wa\right]\Big/P$。

1.30 φ 所满足的方程为：$l\sin^3\varphi-r\cos\varphi=0$，

圆柱的反作用力：$N=P/\sin\varphi$，

铰链的反作用力：$F=P\operatorname{ctg}\varphi$。

1.31 当 $M>2m\cdot\frac{h^2}{a^2}$，杆长 $x>\frac{2}{a^2}(a^2+h^2)^{\frac{3}{2}}$ 时杆先滑出来；

当 $M<2m\cdot\frac{h^2}{a^2}$，$x>\frac{2m+M}{m}\cdot\sqrt{a^2+h^2}$ 时先翻倒。

1.33 准确重量 $W=\sqrt{PQ}$。

1.34 $\operatorname{tg}\theta=\frac{W_1-W_2}{W}\cdot\frac{b}{a}$，取$\frac{a}{b}\ll 1$，天平有高灵敏度。

1.35 $P/W=3\operatorname{ctg}\theta/2$。

1.36 $T=3W$。

1.39 $(1-\cos\alpha)\operatorname{tg}\alpha=W/2ka$。

1.40 $P=\frac{Q}{2^n}+q\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$。

1.41 $P=14$公斤

1.42 $\operatorname{tg}\alpha_1:\operatorname{tg}\alpha_2=P_1:P_2$。

1.43 $\alpha=\operatorname{arc\,tg}(2\operatorname{tg}\theta)$。

1.44 $M_2=M_1r_2/r_1$，方向同 M_1；
$R_1=M_1/r_1$，方向向上；
$R_2=R_1$，方向向下。

1.45 $r_{max}=R(1-\cos\alpha)/\cos\alpha$。

1.46 $Q_{min}=2P(1-r/R)$。

1.47 $\theta\geqslant\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3\sqrt{3}}\approx 10°53'36''$。

1.48 $R_A=5.3$吨，$R_B=3.7$吨（方向向上为正）。

1.49 $R_A=-4.83$吨，$R_B=10$吨，$R_D=0.83$吨（方向向上为正）。

1.50 (a) $R_A=\frac{3}{7}P$，$R_B=\frac{4}{7}P$；

(b) $R_A=\frac{11}{28}P$，$R_B=\frac{6}{7}P$。

1.51 (a) $R_A=4.125\text{ kN}$，$R_B=0.875\text{ kN}$。

(b) $R_{Ax}=-2.4\text{ kN}$，$R_{Ay}=1.95\text{ kN}$，$R_B=1.25\text{kN}$。

答 1.52 题图（数字乘 P）　　答 1.53 题图（数字乘 P）

1.54　$N_1=N_2=-2P/3$，　$N_3=0$。

1.55　$N_1=-0.293P$，　$N_2=-P$，　$N_3=-1.207P$。

1.56　$P\geqslant 2Q/3\pi$。

1.58　$T=20$ 公斤，$R_{Ax}=8.66$ 公斤，　$R_{Ay}=15$ 公斤，$R_{Az}=10$ 公斤，　$R_{Bx}=R_{Bz}=0$。

1.59　$T_{OC}=G\,\mathrm{tg}\,\beta$，　$T_{OA}=T_{OB}=G/(2\cos\alpha\cos\beta)$。

1.60　$\dfrac{Wr}{L}\sin\theta=\sqrt{\left(\dfrac{l}{r}\right)^2-4\sin^2\dfrac{\theta}{2}}$。

1.61　$N_A=\dfrac{1}{3}(W-P)$，　$N_B=N_C=\dfrac{1}{3}(W+2P)$，

当 $P>W$ 时圆桌将翻倒。

1.65　$T_{\min}=\sqrt{6}\,W/18$。

1.66　$T=W\,\mathrm{tg}\,\beta$。

1.67　当$\dfrac{b}{a}<\mu$，$\alpha\geqslant\mathrm{arc\,tg}\dfrac{b}{a}$时翻倒；

当$\dfrac{b}{a}>\mu$，$\alpha\geqslant\mathrm{arc\,tg}\,\mu$ 时滑动。

1.68　$\alpha_{\max}=\mathrm{arc\,sin}\sqrt{\dfrac{\mu r}{a(1+\mu^2)}}$。

1.69　$h\leqslant r(1-1/\sqrt{1+\mu^2})\approx 0.042\,r$。

1.70　$\theta_{\max}=\mathrm{arc\,sin}(\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha)$。

1.71　$h_{\max}\approx 2.37$米。

1.72 $P_{max}=W\cdot\sqrt{\mu^2+(1+2\mu k)^2}/2(1+\mu k)$，其中 $k=\text{tg}\,\alpha$。

1.73 最大分离长度 $s=l\cos\alpha$，其中 l 为线长，$\text{tg}\,\alpha=W_2/\mu(W_1+W_2)$。

1.74 $\mu>a/h$。

1.75 当 $\alpha>\varepsilon=\text{arc tg}\,\mu$，$P>\mu W$ 时先滑动；
当$\alpha<\varepsilon$，$P>W\,\text{tg}\,\alpha$ 时先翻倒。

1.77 $\theta_{max}=2\varepsilon=2\,\text{arc tg}\,\mu$ $(r/l\leqslant 2\mu)$。

1.78 $\theta_{max}=2\varepsilon=2\,\text{arc tg}\,\mu$。当 $\mu<(\sqrt{2}-1)$时，杆子始终在碗内。

1.79 $\mu\geqslant(2-\sqrt{3})$。

1.80 $P\geqslant 3.8$ 公斤。

1.81 $Q_{max}=\min\left[\dfrac{2\mu c r_2 w}{(r_2-r_1)(a-\mu b)},\dfrac{2\mu r_2(wc+pa)}{(r_1+r_2)(a+\mu b)-2\mu r_2 b}\right]$。

1.82 $F_{min}=\mu bW/\sqrt{a^2+\mu^2(a^2-b^2)}$。

1.83 这点与作用力端的距离为$\sqrt{2}/2$ 倍杆长。

1.86 $\mu=\sqrt{10}\,\text{tg}\,\alpha/4$。

1.90 垂度 $f=(\sqrt{2}-1)l$。

1.91 $T=Q(l^2+f^2)/4lf$。

1.92 $h_{max}=2\mu r(1+e^{\mu\pi})/(1+\mu^2)$。

1.94 $\theta=\text{arc sin}\left(\dfrac{h-d}{l\sqrt{\gamma}}\right)$。

1.95 $\theta=\text{arc sin}\left(\dfrac{h}{l}\cdot\sqrt{\dfrac{\rho_2}{\rho_2-\rho_1}}\right)$。

1.97 $T=pa$。

1.98 $R_A=R_B=\gamma a^2\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$。

第 二 章

2.1 $t=1$ 秒时到达 B 点，$AB=4.9$米，$t=3$秒时落地，落地速度

$v=19.6$ 米/秒。

2.2 $\dot{s}=-2u/\sqrt{3}$, $\ddot{s}=-u^2/3\sqrt{3}a$。

2.4 $v_C=v_0\cdot\sqrt{\dfrac{l-a}{l+a-2x}}$, 当 $x=a$ 时，$v_C=v_0$。

2.5 $v=b\omega+\omega x^2/b$, $a=2\omega^2x(1+x^2/b^2)$。

2.6 $S_{min}=15.9$ 公里。

2.7 $f(t)=c_1t^2+c_2t+c_3$．其中 c_1,c_2,c_3 为常量。

2.8 $\dot{x}=\pm\dfrac{cy}{\sqrt{y^2+(m+nx)^2}}$, $\dot{y}=\pm\dfrac{c(m+nx)}{\sqrt{y^2+(m+nx)^2}}$。

2.9 $v_P=\dfrac{v_0}{a+b}\cdot\sqrt{a^2\,\mathrm{tg}^2\,\theta+b^2}$, $a_P=\dfrac{av_0^2}{(a^2+b^2)\cos^3\theta}$。

2.10 轨迹：$4x^2(a^2-y^2)=(x^2+3y^2+a^3-r^2)^2$,

或 $4x^2(r^2-4y^2)=(x^2-3y^2-a^2+r^2)^2$;

速度：$v=\dfrac{r\omega}{2\cos\psi}\cdot[\cos^2\varphi+4\sin\varphi\cos\psi\sin(\varphi+\psi)]^{\frac{1}{2}}$,

其中 $\angle\psi=\angle ABO$, $2a\sin\psi=r\sin\varphi$。

2.11 $v_B=\left[\cos\varphi\pm\dfrac{(a-R\cos\varphi)\sin\varphi}{\sqrt{l^2-h^2-(a-R\cos\varphi)^2}}\right]v_A$。

2.12 $v_C=R\omega\left[2\sin\alpha+\dfrac{(2\sin\alpha-1)\cos\alpha}{\sqrt{\sin\alpha(1-\sin\alpha)}}\right]$。

2.13 当 $n\to1$ 时，曲线退化为两段直线。

2.17 $\ddot{y}=-c^2/4R$

2.18 $\rho=\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{\varphi}{\sin\varphi}$; $x=y\,\mathrm{ctg}\left(\dfrac{a}{b}y\right)$。

2.19 轨迹：$\rho=\dfrac{b\rho_0}{b-c\rho_0(\varphi-\varphi_0)}$; 面积速度 $=\dfrac{1}{2}b$。

2.20 轨迹：$\rho=\rho_0e^{\frac{b}{a}\varphi}$;

运动方程：$\rho=\rho_0+bt$, $\varphi=\dfrac{a}{b}\ln\left(\dfrac{b}{\rho_0}t+1\right)$。

2.21 $v=\omega\dfrac{d\rho}{d\varphi}$, $a=\omega^2\dfrac{d^2\rho}{d\varphi^2}+\dfrac{d\omega}{dt}\cdot\dfrac{d\rho}{d\varphi}$。

当凸轮形状为偏心圆，$\omega=$ 常量，$e \ll R$ 时，

$$v \approx e\omega \sin \varphi, \quad a \approx e\omega^2 \cos \varphi.$$

2.22 轨迹：$\rho=\rho_0 e^{k\varphi/\omega_0}$；速度 $v=\rho\sqrt{k^2+\omega_0^2}$。

2.24 运动方程：$\rho=\frac{c}{\omega}\sin \omega t, \quad \varphi=\omega t$；

轨迹：$\rho=\frac{c}{\omega}\sin \varphi$，或 $x^2+\left(y-\frac{c}{2\omega}\right)^2=\left(\frac{c}{2\omega}\right)^2$。

2.25 $v=\frac{\rho\omega}{a\sqrt{1-e^2}}\cdot\sqrt{\rho(2a-\rho)}$。

2.27 $v=Rv_0/(R-cv_0t)$，其中 $c=\operatorname{ctg}\alpha$。

2.28 $a=4$米/秒^2

2.29 $a=[c^2+(v_0-ct)^4/R^2]^{\frac{1}{2}}$；

当 $t=v_0/c$ 时 $a=c$，这时走了 $N=v_0^2/(4\pi cR)$ 圈。

2.30 $v_1=ue^{-kx}$。

2.31 轨迹：在半径为 $q=q_1$ 的圆柱面上的螺旋线，圆柱中心线沿 q_3，螺距 $p=2\pi$；

速度 $v=\sqrt{q^2+q_3^2}$；加速度 $a=q$；

曲率半径 $\rho=(q^2+q_3^2)/q$。

2.32 设 $r=R+h$，$v_{东}=r(\dot{\psi}+\Omega)\cos\lambda$，$v_{北}=r\dot{\lambda}$，$v_{天}=\dot{h}$；

当以不变高度沿径线航行时，$a_{东}=-2u\Omega\sin\lambda$，$a_{北}=\dot{u}+\frac{1}{2}r\Omega^2\sin 2\lambda$，$\quad a_{天}=-\frac{u^2}{r}-r\Omega^2\cos^2\lambda$；

当沿纬度航行时，$a_{东}=\dot{u}$，$\quad a_{北}=\frac{1}{r}(u+r\Omega\cos\lambda)^2\operatorname{tg}\lambda$，

$a_{天}=-\frac{1}{r}(u+r\Omega\cos\lambda)^2$。

2.33 $v_r=0, \quad v_\theta=-b\theta_0\omega\sin\omega t, \quad v_\varphi=b\omega\sin(\theta_0\cos\omega t)$。

$a_r=-b\theta_0^2\omega^2\sin^2\omega t-b\omega^2\sin^2(\theta_0\cos\omega t)$，

$a_\theta=-b\theta_0\omega^2\cos\omega t-\frac{1}{2}b\omega^2\sin(2\theta_0\cos\omega t)$，

$$a_\varphi = -2b\theta_0\omega^2 \sin\omega t \cos(\theta_0 \cos\omega t).$$

第 三 章

3.1 $a = \frac{a_0}{R} \cdot \sqrt{R^2 + 4h^2}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{R}{2h}$.

3.2 取 A 为坐标原点，AB 为 x 轴，AD 为 y 轴，则 O 点的坐标为 $x_0 = a/4$，$y_c = (2b - a)/4$。

3.3 $\omega_B = \frac{\omega r}{R} \cdot \sin\alpha\left(1 + \frac{r\cos\alpha}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\alpha}}\right)$,

$$\varepsilon_B = \frac{\omega^2 r}{R}\left(\cos\alpha + r \cdot \frac{l^2\cos 2\alpha + r^2\sin^4\alpha}{(l^2 - r^2\sin^2\alpha)^{3/2}}\right).$$

3.4 $v_0 = \frac{R}{R-r}v$，$a_0 = \frac{R}{R-r}a$.

3.5 $\boldsymbol{v}_A = (1 + R/r)\,\omega\,\overrightarrow{AE}$，$\boldsymbol{v}_B = 0$，$\boldsymbol{v}_D = 2\boldsymbol{v}_A$，

$\boldsymbol{v}_C = (1 + R/r)\,\omega\overrightarrow{CD}$，$\boldsymbol{v}_E = (1 + R/r)\,\omega\,\overrightarrow{DE}$.

3.6 取 Ox 为水平轴，Oy 为竖直轴，则

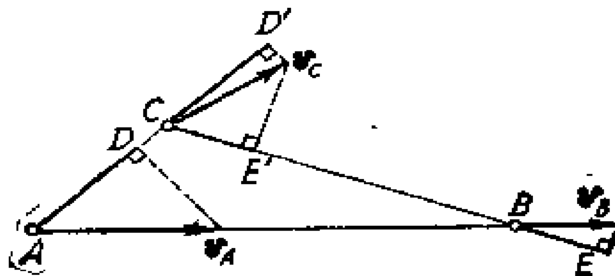
$$x_A = (R - r)\cos\omega_0 t, \quad y_A = (R - r)\sin\omega_0 t;$$

动齿轮的转角 $\psi = (R/r - 1)\,\omega_0 t$.

3.7 当 OA 为竖直位置时，$v_B = 60$厘/米秒；

当 OA 为水平位置时，$v_B = 6.03$厘米/秒。

3.8 图中 $CD' = AD$，$CE' = BE$，则 $v_C = \overrightarrow{CF}$.



答 3.8 题图

3.9 $v_A=2v_O\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\left(\frac{r\sin\varphi}{\sqrt{l^2-4r^2\sin^4(\varphi/2)}}+1\right)$.

3.10 （1）圆盘的角速度$=(v_1-v_2)/2a$，顺时针方向为正，
$\boldsymbol{v}_0=\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)\cdot\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{i}$ 为平行于板向右的单位向量；

（2）定瞬心轨迹为平行于板的直线，它与 O 点的距离 $x=r(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)\cdot\boldsymbol{i}/(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)\cdot\boldsymbol{i}$，$x>0$ 表示直线在 O 点的下方，$x<0$表示直线在 O 点的上方；
动瞬心轨迹是以 O 为中心，以$|x|$为半径的圆。

3.11 定瞬心轨迹是半径为 r，圆心在 O 点的圆；
动瞬心轨迹是半径为 $2r$，圆心在 A 点的圆。

3.12 取定坐标系 Mxy 的原点在M，x 轴平行 $\overrightarrow{OA}$，y 轴沿 $\overrightarrow{OM}$；取动坐标系 $A\xi\eta$ 的原点在 A，ξ 轴沿 $\overrightarrow{AB}$，η 轴垂直 ξ 轴按逆时针方向转动；定瞬心轨迹：$x^2=hy$；动瞬心轨迹：$\xi^4-h^2(\xi^2+\eta^2)=0$；杆的转动角速度 $\omega=vh/(x^2+h^2)$，其中 $x=\overrightarrow{OA}$。

3.13 定瞬心轨迹：以A和B为焦点，半长轴为 a，半短轴为 $\sqrt{a^2-b^2}$的椭圆；
动瞬心轨迹：以C和D为焦点，半长轴和半短轴同上的椭圆。

3.15 $v=h\omega\sin\alpha$.

3.16 $v=R\omega x/\sqrt{x^2-R^2}$，方向向左。

3.17 $v=\frac{R\omega}{d}(b\cos\varphi-a\sin\varphi)$，其中

$$d=[a^2+b^2+R^2+2R(a\cos\varphi+b\sin\varphi)]^{1/2}.$$

3.18 $\omega=\sqrt{2}$ 1/秒，逆时针方向；$\varepsilon=2$ 1/秒^2，顺时针方向；
$a_C=4\sqrt{2}$ 厘米/秒^2，方向沿 $\overrightarrow{BD}$；$a_D=0$.

3.19 （1）$AM=l\cdot\frac{\sin\alpha_1\cos\alpha_2}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}$，　$v_M=v_1\cos\alpha_1=v_2\cos\alpha_2$；

（2） $h=\frac{l}{\mathrm{tg}\alpha_1-\mathrm{tg}\alpha_2}$，　$\omega=\frac{v_M}{l}(\mathrm{tg}\,\alpha_1-\mathrm{tg}\,\alpha_2)$。

3.20　$v_B=\left[v^2+a^2\omega^2-2v\omega\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]^{\frac{1}{2}}$，

v_B 与 BC 边的夹角为 $\alpha=\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{va}{vb-\omega a\sqrt{a^2+b^2}}\right)$；

ω 的转向为由 AD 边转向 AB 边。

3.21　连杆角速度 $=\frac{r\omega(h\cos\varphi-r)}{h^2+r^2-2hr\cos\varphi}$，顺时针转向为正。

3.22　$v_C=3\omega_O(r\cos\varphi+R\sin\varphi)$。

3.23　$a_n=2a\omega^2$，　$a_\tau=a(\sqrt{3}\omega^2-2\varepsilon)$。

3.25　$v_A=v_B=r\omega_r$，　$a_A=a_B=r\omega_r\cdot\sqrt{4\omega_e^2+\omega_r^2}$。

3.26　$v_B=\omega_1 a+\omega_2(a\cos\theta+b\sin\theta)$，　方向沿 $\overrightarrow{OE}\times\overrightarrow{OC}$。

3.27　转动加速度 $a_\tau=h\omega^2/\sin\alpha$；向心加速度 $a_n=2a_\tau\cos^2\alpha$；
全加速度 $a=a_\tau(1+\sin^2 2\alpha)^{1/2}$。

3.28　$\omega_1=4$ 1/秒，　$\omega_2=2$ 1/秒。

3.29　$\omega_x=\frac{n\sqrt{3}}{2}\cos ant$，　$\omega_y=\frac{n\sqrt{3}}{2}\sin ant$，

$\omega_z=n\left(a+\frac{1}{2}\right)$。

$\varepsilon_x=-\frac{\sqrt{3}}{2}an^2\sin ant$，　$\varepsilon_y=\frac{\sqrt{3}}{2}an^2\cos ant$，　$\varepsilon_z=0$；

当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，Oxy 平面为定瞬时轴轨迹面。

3.30　取齿轮Ⅰ、Ⅱ和轴 AB 的转动正方向为：自 A 点看该轮或轴时，转动为顺时针方向；齿轮Ⅲ的转动正方向为：自 C 点看该轮时为顺时针方向。于是

（1） $\Omega=\frac{\pi}{60}(n_1+n_2)=\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)$；

（2）$\omega_3=\frac{\pi R}{60r}(n_2-n_1)=\frac{R}{2r}(\omega_2-\omega_1)$；

（3）定瞬时轴轨迹面为顶点在O点的圆锥，圆锥的轴线沿AB轴方向，圆锥的半顶角为$\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\cdot\frac{r}{R}\right)$；动瞬时轴轨迹面为一圆锥，其轴沿$OC$方向，运动时这锥在上述圆锥面上滚动。

3.31 （1）$v_H=0.5$米/秒；

（2）轮子绕HI轴的角速度$=70$ 1/秒；

（3）$\omega=70.4$ 1/秒，$\varepsilon=490$ 1/秒^2。

3.32 $\alpha=2\,\mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{2R}{R+r}}-1\right)$。

3.33 瞬时转动轴方程为 $x=\frac{3}{4}y=z$；

$\omega=\sqrt{17}$ 1/秒；$v_2=7.5\sqrt{2}$米/秒。

3.34 $v_\xi=a[\dot{\psi}\sin(\theta-\varphi)-(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\sin\varphi]$，

$v_\eta=-a[\dot{\psi}\cos(\theta-\varphi)+(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\cos\varphi]$，

$v_\zeta=a\dot{\psi}\sin\theta$。

3.36 瞬时螺旋轴与AG重合；

取$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$分别表示$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AG}$的单位向量，移动速度$\boldsymbol{v}=a\omega_0\boldsymbol{k}$；

瞬时角速度$\boldsymbol{\omega}=-\omega_0\boldsymbol{k}$；$\boldsymbol{v}_D=a\omega_0(\sqrt{2}\,\boldsymbol{i}-\sqrt{2}\,\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$。

3.37 $t=\frac{2s}{u^2-v^2}\cdot\sqrt{u^2-v^2\sin^2\varphi}$，方向与$AB$成$\alpha$角，这里$\sin\alpha=v\sin\varphi/u$。

3.38 $\boldsymbol{v}=(v_1\boldsymbol{i}+v_2\boldsymbol{j})/\sin\alpha$，其中$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$分别表示$\overrightarrow{CD}$和$\overrightarrow{BA}$的单位向量；

$v=(v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\alpha)^{1/2}/\sin\alpha$。

3.40　$v=R\omega$,　　$a=2R\omega^2$。

3.41　取 A 点为极坐标的原点，A 至船的向径为 ρ，v_1 与 ρ 的夹角为 φ，则轨迹方程为：

$$\rho=\rho_0\left(\frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha}\right)^{k+1}\cdot\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_0}\right)^{k-1}，其中\alpha=\frac{\varphi}{2},k=\frac{v_2}{v_1};$$

若 $v_1=v_2$，则轨迹为抛物线：$\rho=\rho_0\dfrac{1+\cos\varphi_0}{1+\cos\varphi}$。

3.42　取坐标系 Oxy 的原点在船的出发点 O，x 轴沿水流方向，y 轴沿初速方向，则轨迹为

$$\begin{cases}x=cy^2/Du & (y\leqslant D/2),\\ x=\dfrac{2c}{u}y-\dfrac{cy^2}{Du}-\dfrac{cD}{2u} & \left(y\geqslant\dfrac{D}{2}\right);\end{cases}$$

靠岸地点：$x=cD/2u$，　$y=D$。

3.43　设 $OM=\rho$，运动方程为 $\rho=\dfrac{v}{\omega}\sin\omega t$，

点的轨迹为一圆周：$\rho=\dfrac{v}{\omega}\sin\varphi$（$\varphi$ 为 OM 与 x 轴的夹角）；

M 点的加速度 $a=2\omega v$，方向指向 O 点。

3.44　$a=\omega u(\sin\alpha)\sqrt{\omega^2t^2+4}$。

3.45　$\omega=v_0f'/(\eta f'+\sqrt{l^2-\eta^2})$，其中 $f'=dn/d\xi$，
当 $\omega=\omega_0$ 时，凸轮外形的方程为

$$\xi=\frac{v_0}{\omega_0}\arcsin\frac{\eta}{l}+\sqrt{l^2-\eta^2}-l。$$

3.47　（1）设 $OM=x$，则 $\dot{x}=-\omega\sqrt{4r^2-x^2}$，　$\ddot{x}=-\omega^2x$；
（2）$v_r=2r\omega$（沿圆的切线方向），
$a_r=4r\omega^2$（指向圆心）。

3.48　$v=\dfrac{b\omega}{2\pi}\cdot\sqrt{8\pi^2+4\pi+1}$，其方向与三角形之斜边成 $\alpha=\operatorname{arc\,tg}(4\pi+1)$ 的角度并朝向斜边的右方；

$a=\frac{b\omega^2}{\pi}\cdot\sqrt{2\pi^2+2\pi+1}$，其方向与三角形之斜边成 $\beta=$ $\text{arc tg}\left(\frac{1}{2\pi+1}\right)$的角度并朝向斜边的左方。

3.49 $v_A=(\Omega+\omega)r+\Omega l$，方向竖直向上；

$a_A=(\Omega+\omega)^2r+\Omega^2 l$，方向水平向左。

3.50 $v=R\omega\sqrt{10}$，$a=R\sqrt{10(\varepsilon^2+\omega^4)-12\omega^2\varepsilon}$。

3.51 （1）$\frac{1}{2}a\omega^2$（方向竖向下）；

（2）$\frac{8}{\sqrt{7}}a\omega^2$（方向垂直 DC 向右）。

3.53 $a_M=\sqrt{29}a\omega_1^2/4$。

第 四 章

4.1 $R=v^2\,\text{ctg}\,\alpha/g$。

4.2 $v=(\sin\alpha)\sqrt{gl/\cos\alpha}$，　$T=P/\cos\alpha$。

4.3 $T=P\sqrt{1+\left(\frac{l}{x}\right)^2}\cdot\left(1+\frac{l^2v_0^2}{gx^3}\right)$。

4.4 $F_y=-mv_0^2b^4/a^2y^3$。

4.5 $a_A=0$，　$a_B=4.9$米/秒^2（↑）。

4.6 $v^*=1/2k$。

4.8 取 Ox 轴竖直向下，初始时油滴位于 O 点，则有

$$x=k[t+b(e^{-t/b}-1)],$$

其中 $k=\left(\frac{4}{3}\pi r^3\rho g-qE\right)\Big/6\pi\mu r$，　$b=2r^2\rho/9\mu$。

4.9 可缩短37.5米。

4.10 $v=R\sqrt{\frac{2g}{H}\cdot\frac{H-x}{x}}$，运动规律为

$$t=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{H}{2g}}\left(\sqrt{x(H-x)}+H\,\text{arc sin}\sqrt{\frac{H-x}{H}}\right).$$

4.11　（1）$x=R\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}\,t\right)$；

（2）21.2公；

（3）7.9公里/秒。

4.12　除了运动方程的振幅变小外，其他没有变化。

4.15　$a_1=7g/17$，　$a_2=5g/17$，　$a_3=g/17$，方向如图；

$T_1=T_2=24/17$公斤，　$T_3=48/17$公斤。

4.16　$t=\sqrt{\frac{2l}{g}}+\sqrt{\frac{b}{g}}\left(\pi-\text{arc tg}\sqrt{\frac{2l}{b}}\right)$，

D点在A点以下的距离为$l+b+\sqrt{b^2+2lb}$。

4.17　串联时$T=2\pi\sqrt{m\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)}$，并联时$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$。

4.18　$F>(m_1+m_2)g$。

4.19　最大伸长是$\delta+v_0\sqrt{\frac{\delta}{g}}$，最大张力是$P\left(1+\frac{v_0}{\sqrt{g\delta}}\right)$。

4.20　设x为m_1离上端的距离，则$x=l+a+b\cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\,t\right)$，

其中$b=m_2a/m_1$。

4.21　振动周期$T=\pi\sqrt{3a/g}$，

绳中张力$T=2mg\left[1-\frac{1}{3}\cos\left(2\sqrt{\frac{g}{3a}}\,t\right)\right]$，

弹簧中的张力$T'=mg\left[1-\cos\left(2\sqrt{\frac{g}{3a}}\,t\right)\right]$。

4.22
$$x=\begin{cases}10\cos 4t & \left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{24}\right),\\ 5\sqrt{3}-20\left(t-\frac{\pi}{24}\right) & \left(\frac{\pi}{24}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{24}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right),\\ -5\sin 4\left(t-\frac{\pi}{24}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right), & t\geqslant\frac{\pi}{24}+\frac{\sqrt{3}}{4},\end{cases}$$

其中时间单位为秒，距离单位为厘米。

4.24 $n=244$转/分， $A=10^{-3}$厘米。

4.25 $x=2(\cos t-\cos 2t)$。

4.26 距离 $S=\frac{2v_0^2}{g}\cdot\frac{\cos\varphi\sin(\varphi-\alpha)}{\cos^2\alpha}$，

$$S_{max}=\frac{v_0^2}{2g}\sec^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

4.27 仰角为$\frac{1}{2}\arcsin\frac{a\sin 2\beta+b\sin 2\alpha}{a+b}$。

4.28 当$(H-h)\leqslant\frac{v_0^2}{4g}$时 $S=4\sqrt{(H-h)\left[\frac{v_0^2}{2g}-(H-h)\right]}$；

当$(H-h)\geqslant\frac{v_0^2}{4g}$时 $S=v_0^2/g$。

4.30 $\sin\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)=\frac{g\tau}{2v_0}\cos\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)$。

4.31 $\alpha=\frac{1}{2}\arccos\frac{gh}{v_0^2+gh}$ 或 $\alpha=\operatorname{arc\,csc}\sqrt{2\left(1+\frac{gh}{v_0^2}\right)}$。

4.32 $t=\frac{1}{k}\ln\left(1+\frac{2v_0k\sin\alpha}{g}\right)$。

4.34 $v_{max}=\left[gR\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha+\mu}{1-\mu\operatorname{tg}\alpha}\right]^{\frac{1}{2}}$， $v_{min}=\left[gR\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha-\mu}{1+\mu\operatorname{tg}\alpha}\right]^{\frac{1}{2}}$。

4.35 取 y 轴沿水平初速方向， x 轴沿斜面向下，参数方程为：

$$x=-\frac{v_0^2}{4a}\left[\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}+\frac{\cos\theta}{(1+\cos\theta)^2}\right],$$

$$y=\frac{v_0^2}{3a}\left[2-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}-\frac{\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2}\right],$$

其中 θ 角为速度方向与 x 轴的夹角，它从$\frac{\pi}{2}$逐渐减小。

4.37 $t=a\sqrt{m\pi/2k}$。

4.38 不正确，因为弹簧慢慢伸长时，外力要作功。

4.39 $v=\sqrt{14k/3x_0^3}$。

4.40 取坐标原点在地心，Ox 轴沿初速方向，则

$$x=\left[R^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}Rt\sqrt{2g}\right]^{\frac{2}{3}}.$$

4.42 $h=a\left(\cos\alpha+1+\frac{1}{2\cos\alpha}\right)$，当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，h 最小。

4.44 $\alpha\geqslant\arccos\left[\frac{h}{l}\left(\frac{3}{2}+\cos\beta\right)-\frac{3}{2}\right]$，

$$\Delta T=2mg\frac{h}{l}\left(\cos\beta+\frac{3}{2}\right).$$

4.48 $T=\frac{2\pi}{g}\sqrt{\frac{\lambda}{m}}$。

4.49 $T=2\pi\sqrt{\frac{H}{3g}}\cdot\frac{\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt[6]{\gamma_2(\gamma_2-\gamma_1)^2}}$。

4.50 $T=2\pi\left[\frac{h(3R-h)}{3g(2R-h)}\right]^{\frac{1}{2}}$。

4.51 $T=\pi l\sqrt{ml/qQ}$。

4.52 $T=(2\pi/S)\sqrt{V_0m/p_0\gamma}$。

4.56 质点离初始位置的距离是 4 厘米。

4.57 （3） 半周期为$\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$。

4.59 （1）平衡位置 $\theta=\pm90°$（稳定），$\theta=180°$（不稳定）；
（2）$T=2\pi\sqrt{2(\sqrt{2}-1)R/g}\approx5.7\sqrt{R/g}$。

4.64 轨迹为对数螺线 $\ln\frac{r}{r_0}=\pm\theta\sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2-1}$，其中 $h=r^2\dot{\theta}=$ 常量。

4.65 $v_1=8.1$公里/秒， $v_2=6.3$公里/秒， $T=114$分。

4.66　$\Delta E=\frac{1}{8}mgR\approx 2.35\times 10^{10}$牛顿米。

$\Delta v_A=0.87$公里/秒，　$\Delta v_B=0.73$公里/秒。

4.67　最小速度 $V=11.55$公里/秒。

4.70　平面 Oxy 上的 双曲线$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{ky}{v_0}\right)^2=1$。

4.72　$\left(\frac{x-a}{x_0-a}\right)^2+\left[(y-b)-\left(\frac{x-a}{x_0-a}\right)(y_0-b)\right]^2\cdot\frac{k}{v_0^2}=1$，

其中 $k=\sum k_i$，　$a=\frac{1}{k}\sum k_i x_i$，　$b=\frac{1}{k}\sum k_i y_i$，$x_i$ 和 y_i 是固定中心 c_i 的坐标。

4.73　轨迹为椭圆柱$\frac{y^2}{a^2}+\frac{2kz^2}{b^2}=1$上的螺旋线，

螺距 $h=\pi b\sqrt{\frac{2}{k}}$。

4.75　运动方程：$\rho=R-at$，$\varphi=v_0t/(R-at)$；

张力：$T=mv_0^2R^2/(R-at)^3$。

4.77　取 $c=u^2/Rg$，则

（2）$e=\sqrt{cr/R}$，　$a=rR/(R-cr)$，　$b=a\sqrt{1-e^2}$；

（3）$T=T_0\Big/\left(1-c\frac{r}{R}\right)^{3/2}$；

（4）$T-T_0\approx 0.01$秒。

4.78　$32\rho^2(2\rho-l)^2-56l^2\rho^2+27l^4=0$。

4.79　$\beta=\alpha/2$。

4.80　如 $e^2<1/2$，则沿长轴；否则沿与长轴夹角为 α 的直径，

$\alpha=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}e}\right)$，$e$ 为椭圆的偏心率。

4.84　$t=6\sqrt{r/g}$。

索　　引

B

C

D

F

G

H

J

K

L

M

N

O

P

Q

S

T

X

Y

Z